ה $G_{\mu\nu}$ ב-(46) עם טנזור אינשטיין מ(42). המשוואות (46) (סך הכל 10 שונות) נקראות משוואות השדה של אינשטיין.

עלינו עדיין לבדוק שבמערכת אינרציאלית מקומית של (46) מתקבלות (43) הניוטוניות. ראשית כל ניקח עקבה של (46) לאור ההגדרה (42)

$$R - \frac{1}{2}\cdot 4R = -R = -8\pi G T \tag{48}$$

נציב ב-(46) לקבל משוואות אינשטיין בדרך אלטרנטיבית

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \tag{49}$$

כעת נתחיל לקרב.

$$R_{\delta\rho} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\delta\gamma\rho} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\left(h_{\gamma\alpha,\delta\rho} - h_{\delta\gamma,\alpha\rho} - h_{\rho\alpha,\delta\gamma} + h_{\delta\rho,\alpha\gamma}\right) + O(h^2) \tag{50}$$

כאן הצבנו עפ"י (2.48) המתאים לשדה גרביטציוני חלש, אפילו אם לא במערכת אינרציאלית מקומית. נניח בנוסף לכך שניתן להזניח נגזרות לפי x^0 של $h_{\alpha\beta}$ לעומת הנגזרות המרחביות. זה בוודאי נכון במצב סטטי, אבל יתברר כמוצדק גם לכל סיטואציה בה התנועות הן לא רלטיביסטיות.

$$R_{00} \simeq \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma} h_{00,\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\Box h_{00} \simeq \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{51}$$

כאשר $T_{\alpha\beta}$ מורכב מחומר רגיל כמו נוזלים, המופיע בסעיף (1.61) מראה ש

$$|T_{ij}| \ll T_{00} \qquad |T_{0i}| \ll T_{00} \tag{52}$$

כי המהירויות של החלקיקים קטנות לעומת c. זה אומר

$$T \cong \eta^{00} T_{00} + \eta^{ij} T_{ij} + 2\eta^{0i} T_{0i} \simeq -T_{00} \tag{53}$$

ומכיוון ש $g_{00} \simeq -1$ (49) נותנת

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = -4\pi G T_{00} \tag{54}$$

שזהו בדיוק (45) שהוא שקול ל-(43). המסקנה היא שמשוואות אינשטיין כוללות בתוכן משוואות פואסון של התורה הניוטונית בגבול של שדות חלשים, ותנועות לא רלטיביסטיות.

איך וודאים שמשוואות איינשטיין הן היחידות
עם התכונה של קווריאנטיות והתאמה לגרביטציה
ניוטונית? ישנו משפט שטנזור רימן והטנזורים
שהם מתקבלים ממנו ע"י צמצום הם יחידים בכך
שהם בנויים ממטריקה ונגזרותיה, ולינאריים
בנגזרותיה השניות. לכן אין אפשרות במסגרת
תורה בנויה על מטריקה, לעבוד עם משוואות
אחרות.

5. מבנה משוואות איינשטיין

הטנזורים $G_{\mu\nu}$ ו- $T_{\mu\nu}$ הם סימטריים ולכן
בעלי 10 רכיבים בלתי תלויים. נראה כאילו יש
10 משוואות איינשטיין בלתי תלויות, אבל זה לא
נכון. יש 4 זהויות ביאנקי (41), ו-4 "חוקי שימור"
(47) ולכן יש 4 זהויות מהטיפוס

$$(G_\mu{}^\nu + 8\pi G T_\mu{}^\nu)_{;\nu} = 0 \qquad (55)$$

אלה הן זהויות - לא משוואות. הן נכונות לכל
מטריקה, לא רק למטריקה הפיזיקלית שקיימת
בנסיבות מסוימות. לכן רק 6 משוואות איינשטיין
נחשבות בלתי תלויות.

כל זה אומר שמשוואות איינשטיין קובעות רק 6
מתוך 10 הרכיבים הבלתי תלויים של המטריקה.
אבל זה כמו שצריך להיות. טרנספורמצית
הקואורדינטות כללית כרוכה ב 4 פונקציות
כלליות $x'^1 = f(x^1,x^2,x^3,x^4)$ .... ולכן אפשר לשנות
4 מתוך רכיבי המטריקה באופן
חופשי בלי לשנות הפיזיקה. לכן משוואות
הגרביטציה מורשות לקבוע רק 6 מרכיבי
המטריקה כמו שבאמת קורה.

הדבר דומה למשוואות מקסוול. אם נבטא
השדה האלקטרומגנטי במונחים של A_μ, אפשר
להוסיף ל A_μ גרדיינט של פונקציה שרירותית
בלי לשנות הפיזיקה. זה אומר שרק 3
מתוך רכיבי A_μ בלתי תלויים. אפשר לנצל
חופש שינוי הכיול כדי להטיל על A_μ תנאי
דיפרנציאלי. למשל תנאי כיול לורנץ (1.167).
באופן אפקטיבי הוא קובע ϕ במונחים של $\vec{A}$.
באנלוגיה גמורה אפשר להשתמש בחופש
בביצוע טרנספורמציה קואורדינטות כדי להטיל
4 תנאים כלשהם על רכיבי המטריקה. אז
ישארו 6 רכיבים חופשיים שיקבעו ע"י משוואות
איינשטיין. כך טוב לבחור את "תנאי הכיול"
או "תנאי הקואורדינטות" הנוחה כדי לפשט
מלאכת פתרון המשוואות.

הדיון הקודם אומר שיש שתי קבוצות של
משוואות איינשטיין: 6 שקובעות המטריקה

4-ל משוואות מתפקיד זה ע"י זהויות ביאנקי. האם ניתן לזהות בכלל את שתי הקבוצות?

33

זה מביא אותנו להתאמת קבעות Cauchy הוא בעיית ערך התחלתי של משוואות איינשטיין. השאלה כאן הוא מה יש לתת בזמן $x^0 = const.$ כדי שנוכל למצוא המטריקה בזמנים מאוחרים יותר. כעת ה-$G^{\mu\nu}$, כיוון שהם בנויים מרכיבי טנזור רימן, יש בהם נגזרות שניות של המטריקה ונגזרות שניות לפי x^0 בפרט. זה אומר שעלינו לתת לא רק את $g_{\alpha\beta}$ אלא גם את $g_{\alpha\beta,0}$ בתנאי התחלה לפתרון הדינמיקה. עם תנאי התחלה באלה המשוואות של איינשטיין אמורות לקבוע, דרך הנגזרות

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial (x^0)^2} \tag{57}$$

שבהם, כיצד לקדם התנועה בזמן.

אך ישנה בעיה. נכתוב את זהויות ביאנקי

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = G^{\mu 0}{}_{,0} + G^{\mu i}{}_{,i} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} G^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} G^{\mu\lambda} = 0 \tag{58}$$

ב-$G^{\mu\lambda}$ יש נגזרות שניות $g_{\alpha\beta,00}$ אך לא יותר גבוהות. לכן אסור שב-$G^{\mu 0}$ יופיעו נגזרות מעל ל-$g_{\alpha\beta,0}$. זה כבר אומר שהמשוואות

$$G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0} \tag{59}$$

אינן אומרות לנו איך לקדם התנועה בזמן. כמובן שהמשוואות

$$G^{ij} = -8\pi G T^{ij} \tag{60}$$

כן עושות זאת. ונזכור שיש בדיוק 6 משוואות דינמיות בין משוואות איינשטיין, בדיוק המספר הנחוץ כדי לקבוע 6 רכיבים הדינמיים של המטריקה.

ומה תפקידן של משוואות (59)? הן משמשות כקשר בין ה-$g_{\alpha\beta,0}$ לנגזרות מסדר שני כגון $g_{\alpha\beta,ij}$ ו-$g_{\alpha\beta,0i}$. אי אפשר לתת תנאי התחלה שיזוזו אותם בצורה שרירותית כי הם יסתרו את (59). לכן (59) משמשות כמשוואות אילוץ או סתם אילוצים על תנאי ההתחלה המותרים. רק כאשר תנאי ההתחלה קיימו את האילוצים (59) ניתן לפנות ל-(60) ולפתח התנועה בזמן.

אבל אז נשאלת השאלה, אם (59) [illegible] רק

ב-x^0 ההתחלתי, ואחר כך נשתמש ב-(60) כמשוואות דינמיות. מה ערב לנו ש-(59) ימשיכו להתקיים משך הזמן? נכתוב האנלוג של (58) עבור $T^{\mu\nu}$ ונחבר עם (58) כדי לקבל

$$(61) \quad (G^{\mu 0} + 8\pi G T^{\mu 0})_{,0} = -(G^{\mu i} + 8\pi G T^{\mu i})_{,i}$$

$$- \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(G^{\lambda\nu} + 8\pi G T^{\lambda\nu}) - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}(G^{\mu\lambda} + 8\pi G T^{\mu\lambda}) = 0$$

תקפות משוואות הדינמיות (60) וקיום האילוצים (59) ב-x^0 ההתחלתי מבטיח לנו ש

$$(62) \quad (G^{\mu 0} + 8\pi G T^{\mu 0})_{,0} = 0$$

ב-x^0 ההתחלתי. אז האילוצים יקוימו בזמן פעוט לאחר x^0 ההתחלתי. ניקח אותו זמן כזמן התחלתי חדש ונחזור על הארגומנט. נגיע למסקנה שבתוצאה ממשוואות הדינמיות, משוואות האילוץ ממשיכות להתקיים כל הזמן.

נעיר אבל שזה שאלה להשתמש במשוואות האילוץ או מקבלים כדי לברר פרטים על המטריקה, אין כל סתירה בזה גם על פי שמשוואות אלה אינן דינמיות.

5. פתרון שוורצשילד ובדיקות נסיוניות

בגלל אי-ליניאריות משוואות איינשטיין קשה למצוא פתרונות מדוייקים למשוואות, במיוחד כאלה המקיימים דרישות פיסיקליות ברורות. איינשטיין תקף הוצלחה בעזרת פתרונות מקורבים ("בקרוב הליניארי"). הפתרון הראשון הסטטי כדורי ומדוייק התגלה ע"י K. Schwarzschild ב-1916, שנה לאחר פרסום היחסות הכללית. הפתרון חשוב להבנת מהות הגרביטציה, המושג של חור שחור, ולבדיקות הנסיוניות של נכונות התורה בכלל.

א. משוואות איינשטיין לסימטריה כדורית

כיצד כותבים המטריקה בסיטואציה שהיא סימטרית כדורית? המובן של הסימטריה הוא שקיימים משטחים במרחב הזמן, סגורים אחד בתוך השני וכך שבמונחים של שתי זוויות המוכרות θ, φ ניתן לכתוב הגאומטריה על כל משטח לפי

$$(1) \quad dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

כאן $4\pi R^2$ הוא שטח המשטח. משטחים השונים נבדלים בערך R. אם נרצה לכתוב הגאומטריה של המרחב ה-3-ממדי בזמן נתון נכתוב

$$(2) \qquad dl^2 = A(r,t)\,dr^2 + R(r,t)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

כאן r משמש כקואורדינטה רדיאלית. לא הכנסנו $dr\,d\theta$ או $dr\,d\varphi$ כי אחרת פשוט להראות שקווי r, θ, φ אורתוגונליים. בצד הזמן 2 תנאים על הקואורדינטות. עתה נשלים את המטריקה של מרחב הזמן

$$(3) \qquad ds^2 = -B\,dt^2 + 2C\,dr\,dt + A\,dr^2 + R^2 d\Omega^2$$

כאשר A, B, C ו- R פונקציות של r, t ו-

$$(4) \qquad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

שוב, לא הכנסנו $dt\,d\theta$ או $dt\,d\varphi$ כי נראה שהזמן צריך לזרום [illegible] בכדורים. ויש כאן עוד 2 תנאי קואורדינטות. כמובן שאין תלות של שום רכיב המטריקה ב-θ או φ בגלל הסימטריה הכדורית.

כדי נעבור לקואורדינטות r', t' חדשות. זה אומר

$$(5) \qquad \begin{aligned} dt &= \frac{\partial t}{\partial t'}dt' + \frac{\partial t}{\partial r'}dr' \\ dr &= \frac{\partial r}{\partial t'}dt' + \frac{\partial r}{\partial r'}dr' \end{aligned}$$

נציב ב-(3). המקדם של $dr'dt'$ הוא

$$(6) \qquad -2B\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial r'} + 2A\frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial r}{\partial r'} + 2C\left(\frac{\partial r}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial r'} + \frac{\partial r}{\partial r'}\frac{\partial t}{\partial t'}\right)$$

וזה של $d\Omega^2$ הוא

$$(7) \qquad R\left(r(r',t'), t(r',t')\right)^2$$

נבחר הטרנספורמציה כך שהראשון מתאפס, והשני הוא פשוט r'^2 - שני תנאים על 2 הפונקציות $t(r',t')$ ו- $r(r',t')$. שלושת הכל ונקבל

$$(8) \qquad ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

שהינה צורת מטריקה הכדורית הסטנדרטית. כאן הסרנו את סימני ו' וקראנו למקדמים של dt^2 ו-dr^2 בשמות חדשים, כתבנו כאקספוננטים של $\nu(r,t)$ ו- $\lambda(r,t)$ לנוחות.

מ-(8) נקבל

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\lambda'}{2} \qquad \Gamma^t_{rt} = \frac{\nu'}{2} \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{\dot\lambda}{2} e^{\lambda-\nu} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r e^{-\lambda} \qquad \Gamma^r_{tt} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \tag{9}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = r^{-1} \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\theta} = \cot\theta \qquad \Gamma^t_{tt} = \frac{\dot\nu}{2}$$

$$\Gamma^r_{rt} = \frac{\dot\lambda}{2} \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda}$$

ה-Γ סימטרים באינדקסים התחתונים. כל הרכיבים האחרים מתאפסים.

מ-(4.19) מקבלים

$$R_{\delta\rho} = \Gamma^\alpha_{\alpha\delta,\rho} - \Gamma^\alpha_{\delta\rho,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\Gamma^\beta_{\delta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\delta\rho} \tag{10}$$

בשום בעיה כאן אפשר להיעזר בנוסחה (3.19). מצמצמים אינדקס כדי לצבור R, וכדאי לכתוב משוואות אינשטיין בצורה מעורבת

$$G_\alpha{}^\beta = R_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha{}^\beta R = -8\pi G T_\alpha{}^\beta \tag{11}$$

מקבלים בסוף המשוואות הבלתי טריוויאליות

$$-e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} = -8\pi G T_0{}^r \tag{12}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = -8\pi G T_0{}^0 \tag{13}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = -8\pi G T_r{}^r \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'-\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right) = -8\pi G T_\theta{}^\theta = -8\pi G T_\varphi{}^\varphi \tag{15}$$

בקבלת משוואות אלה מ-(11) יש לזכור שבספרים השונים נהוגים הסכמים שונים לגבי סיגנטורה המטריקה ולא סימן טנזורי העקמומיות.

ב. משפט Birkhoff

המשפט מתייחס לאזור בגיאומטריה כדורית שאין בו חומר ולכן $T_{\mu\nu}=0$. מ-(12) שמקום ש-λ אינה תלויה בזמן. כעת נפתור (14) מ-(13) לקבל

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\lambda'+\nu')=0 \tag{16}$$

זאת אומרת ש- $\lambda+\nu$ היא פונקציה של זמן בלבד. וכיוון ש-λ לא תלויה בזמן אזי

$$\nu=f(t)-\lambda(r) \tag{17}$$

ונקבל שהמטריקה היא

$$ds^2=-e^{f(t)}e^{-\lambda(r)}dt^2+e^{\lambda(r)}dr^2+r^2d\Omega^2 \tag{18}$$

נעשה טרנספורמציה של t כך ש

$$e^{f/2}dt=dt' \tag{19}$$

ואז בזמן <u>החדש</u>

$$ds^2=-e^{-\lambda(r)}dt^2+e^{\lambda(r)}dr^2+r^2d\Omega^2 \tag{20}$$

המסקנה: בגיאומטריה כדורית סימטרית באזור ריק מחומר הגיאומטריה היא סטטית לחלוטין. זה משפט בירקהוף. יש להוסיף שהביטוי "סטטי" מניח שהמקדם של dt^2 שלילי. אם המשוואות תרכבנה ש-e^{ν} הופך סימן, לא נוכל לבחור t כזמן, ולכן המשפט מתקלקל. זה השורש העובדה שאם יש כמה אזורים ריקים מופרדים בקליפות כדוריות של חומר, יתכן קצב הזמן t שונה מאזור לאזור.

כעת משכתב (13) כך:

$$\frac{d}{dr}\left(r(e^{-\lambda}-1)\right)=0 \tag{21}$$

זה אומר

$$e^{-\lambda}-1=\frac{C}{r}\ ;\ C\ \text{קבוע} \tag{22}$$

או

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2M}{r} \tag{23}$$

כאשר $2M=-C$. ה-M קבוע, נוכל להיות שונה

בכל אזור ריק.

כאשר יש אזור פנימי ריק, כלומר כמגיע ל $r=0$, יש לקחת $M=0$ עקרון. כי נגיד ש $M\neq 0$ שם. אם נחשב את הרכיבים השונים של טנזור R^{α}, נמצא שכולם מתבדרים ב $r\to 0$, זה לא תלוי בבחירה של $r=0$ כנקודה רגולרית ולא ודאות דבר. אולי, יטען משהו, ההתבדרויות אלו נובעות מאופי הקואורדינטות t,r,θ,ϕ. אז נחשב סקלר:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 48\frac{M^2}{r^6} \tag{24}$$

ברור כבר שכאן אין תנאי, $r=0$ תהיה נקודה רגולרית רק כאשר $M=0$. אז מרחב הזמן הינו שטוח שם!

35 בכל אזור ריק אחר $M\neq 0$. מהי המשמעות של M? כדי לברר צריך לעבור לאזור החיצוני כלומר לגבול שבו משתרע ריק עד $r=\infty$. עבור r גדול נקבל כי (20)

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{25}$$

זה קרוב למרחב-זמן מינקובסקי, ולכן t נחשב כזמן רגיל. אז השוואה עם (2.53) נותנת ש-

$$-\frac{2M}{r} = +2\phi \tag{26}$$

כלומר M הוא הקבוע G כפול מסת כל הגוף המוזכר המטריקה. לכן את מטריקת שוורצשילד החיצונית ניתן לכתוב

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2Gm}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2Gm}{r}} + r^2 d\Omega^2 \tag{27}$$

כאשר m הינו מסת הגוף (ותודות $c=1$). במקרה הכללי, המטריקה החיצונית נקבעת חד-ערכית ע"י מסת הגוף.

ג. המקור הפנימי למטריקת שוורצשילד

הזיהוי של M כ- G כפול מסת הגוף מסתמך על הצורה של ה-גבול של מטריקה הקרובה למינקובסקי. מטריקת שוורצשילד קרובה למינקובסקי רק כאשר

$$2M/r \ll 1$$

אם החומר הוא צר המטריקה נמצאת מכוונת בתוצאה קטן, תנאי זה ונפר בקלות. איך נקבע את M אז? האם הוא שווה ישיר עם מסת הגוף?

116 a

נחזור ל-(13) ונכתוב אותה בצורה

$$\frac{d}{dr}\left(r\left(e^{-\lambda}-1\right)\right) = 8\pi G T_0^0 r^2 \tag{28}$$

נאינטגרל זאת מ $r=0$ עד r מסוים, בהנחה ש $T_0^0 r^2$ לא מתבדר ב- $r=0$. אז נקבל r

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{2G}{r}\int_0^r 4\pi T_0^0 r^2\, dr \tag{29}$$

כך שהמטריקה (8) נראית

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + \frac{dr^2}{1+\frac{2G}{r}\int_0^r 4\pi T_0^0 r^2 dr} + r^2 d\Omega^2 \tag{30}$$

זה כללי. מחוץ לכל החומר, ולאור (20), חוזרים לצורה של שוורצשילד (27) אבל עם

$$m = -\int_0^R 4\pi T_0^0 r^2\, dr\;; \quad R \text{ רדיוס החומר} \tag{31}$$

הפרמטר m נראה כמו מסה, לפחות ניוטונית. הוא גם דומה לביטוי עבור אנרגיה שמורה במטריקה סטטית (3.239) עם ההבדל שכאשר מבצעים ב (3.239) את האינטגרל הנפחי בעזרת הביטוי

$$\sqrt{-g} = r^2 e^{\nu/2} e^{\lambda/2} \tag{32}$$

של מטריקה הכללית (8), מקבלים ביטוי שמתלכד עם (31) רק כאשר $\nu+\lambda=0$, כלומר, כאשר אפשר לקחת את המטריקה באזור החומר כשוורצשילד חיצונית. בדרך כלל אי אפשר לעשות זאת. ההבדל בין שני המסות נובע מכך ש- m ב (31) חייב לכלול אנרגיה גרביטציונית (אנרגיית קשר במושגים ניוטוניים), והאנרגיה השמורה (3.239) בפירוש אינה כוללת אותה. על ההגדרה הזו, יש לראות בביטוי (31) ביטוי נכון למסה גרביטציונית פעילה של גוף כדורי.

מ-(29) עם ההנחה שצפיפות אנרגיה $-T_0^0$ תהיה חיובית ולכן $-T_0^0 > 0$, רואים ש

$$e^{\lambda/2} > 1 \tag{33}$$

בכל r. זאת אומרת, המרחק הרדיאלי (בו-זמני) של נקודה r מהמרכז הוא תמיד גדול יותר מ- r. היקף עיגול ב- r הוא עדיין $2\pi r$, ולכן יחס ההיקף למרחק הרדיאלי קטן מ 2π - בגלל גרביטציה.

אם נכניס (14) מ-(13) נקבל

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\lambda'+\nu') = -8\pi G(T_0^0 - T_r^r) \qquad (34)$$

לצורך ההערה הבאה נניח שהחומר הוא נוזל אידיאלי. אז מ(28) נקבל

$$T_0^0 - T_r^r = (\rho+p)(u^0u_0 - u^1u_1) < 0 \qquad (35)$$

לכן סכ'ע $\lambda'+\nu'$. אבל ב $r\to\infty$ $\lambda+\nu$ מתאפס כי המטריקה שואפת למינקובסקי. זאת אומרת

$$\lambda+\nu < 0 \qquad (36)$$

בכל מקום. לאור (33) גם לומדים מזה ש

$$e^{\nu} < 1 \qquad (37)$$

בכל מקום. כל התוצאות בסעיף זה עד כאן רלבנטיות גם כאשר החומר לא במנוחה, למשל, כאשר מדובר בכדור נוזל קורס, או מתפוצץ.

למרות שמחוץ לחומר ג איננה תלויה בזמן. נובע מ (29) שהמסה m שמורה גם כאשר יש התמוטטות או התפשטות החומר.

ד. אופק שוורצשילד

נשאלת השאלה, איך יכול להיות מצב בו כדור החומר משתרע אל מתחת $r=2M$ כך שבמטריקת שוורצשילד (27) מופיע סינגולריות ב $r=2M$ וכן אשר בו המקדם של dt^2 הוא בעל סימן הפוך למקובל? הרדיוס הקריטי הזה נקרא רדיוס הגרביטציוני r_g. אם נשיב c נקבל

$$r_g = 2M = \frac{2Gm}{c^2} = 2.95\,\frac{m}{M_\odot}\ \text{km} \qquad (38)$$

הצפיפות הממוצעת בתוך הרדיוס הגרביטציוני הוא

$$\rho_g = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} = 1.82\times10^{16}\left(\frac{M_\odot}{m}\right)^2 \text{g cm}^{-3} \qquad (39)$$

למשל עד סקלת כוכב אלה הם צירופים קוונטיים, אך

למסות בסקלה תת-גלקטית, $10^8 M_\odot$ בקלות רבה. זאת אומרת שעבור מסה מספיק גדולה אין כל מניעה להתכווצות כדור קטן מרדיוס השוורצשילד שלה.

השאלה הבאה היא, האם במהלך קריסה תחת השפעת הכבידה של כדור חומר עם לחץ זניח אכן מגיע הכדור עד רדיוס השוורצשילד או מתחת לו?

3b

לצורך התשובה נתרכז בחלקיק בשולי הכדור. הוא גם נע במטריקת שוורצשילד אבל גם מסמן גבול הכדור. לכן אם נדע איך חלקיק חופשי מכחות נע בקואורדינטות המטריקה שוורצשילד, נדע איך הכדור קורס. אנו מעוניינים במסלול חלקיק מהצורה

$$r = \tilde{r}(\tau) \qquad t = t(\tau) \qquad \theta = \varphi = const. \tag{40}$$

במטריקת שוורצשילד יש וקטור קילינג דמוי זמן

$$\xi^\alpha = (1,0,0,0) = \delta^\alpha_0 \tag{41}$$

ולכן לחלקיק חופשי ישנו קבוע תנועה

$$E = -\xi_\alpha U^\alpha = -g_{00}\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2M}{\tilde{r}}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{42}$$

מהו ערך E? נגיד שהחלקיק (גבול הכדור) התחיל ממנוחה ברדיוס r_0. אז

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau}\Big|_{r_0} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \tag{43}$$

האינטרפרטציה – E היא אנרגיה ליחידת מסה של החלקיק.

המהירות של כל חלקיק חייבת להיות מנורמלת ל- -1:

$$g_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g_{rr}\left(\frac{d\tilde{r}}{d\tau}\right)^2 = -1 \tag{44}$$

אם נציב $dt/d\tau$ מ-(42) והמטריקה מ-(27) נקבל אחרי סידור מחדש

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{r}}{d\tau}\right)^2 - \frac{M}{\tilde{r}} = \frac{1}{2}\left(E^2 - 1\right) = -\frac{M}{r_0} \tag{45}$$

זהו בדיוק האינטגרל הראשון עבור נפילה ניוטונית של חלקיק בשדה של מסה $G^{-1}M$ החל מרדיוס r_0, ולכן הפתרון ידוע מיד.

$$\tilde{r} = \tfrac{1}{2} r_0 (1 + \cos\eta) \qquad 0 \le \eta \le \pi$$

(46)

$$\tau = (r_0^3/8M)^{1/2} (\eta + \sin\eta)$$

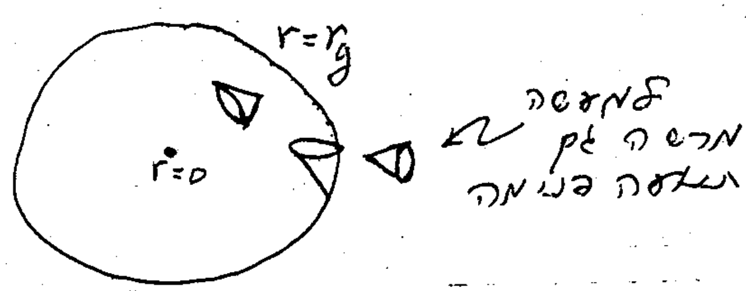
הקריסה מתחילה ב-$\eta=0$ ומסתיימת ב $\eta=\pi$ כאשר רדיוס הכדור מגיע מבחינה לאפס. זה קורה בזמן עצמי

(47) $$\tau_f = \pi (r_0^3/8M)^{1/2}$$

קצת לפני זה המשטח של הכדור חוצה $r=2M$. מרגע זה נשאר אזור מחוץ לכדור בו $g_{00}>0$ בניגוד לכל מה שראינו עד עתה.

האזור הריק שבין r_g לרדיוס הכדור $\tilde{r}$ הוא מוזר. למשל, לפי המטריקה (27) המסלול $r=const.$ עם t רץ וכל השאר בזוויות θ, φ הוא מסלול דמוי מרחב ולכן מחוץ לחרוט האור המקומי. במילים אחרות, t הוא כבר לא זמן שם. מסלול של t, θ, φ קבועים עם r רץ הוא דמוי זמן. מתברר שהמסלול הולך קדימה רק כאשר r הולך וקטן. חוץ מזה מסלול עם θ, φ קבועים ו- $r \le r_g$ הוא דמוי אור ולכן רק פוטון יכול לנוע בו. אפשר לסכם כל האמור ע"י ציור כיוון קונוס האור באזורים השונים משקלו רצופות!

(48)



כל האמור נכון לגבי קשר באיזה כוח פועלים אל גוף או הכדור עצמו. ברור שלא ימנעו את ההתמוטטות בתוך רדיוס הגרביטציוני. התאור עד בה נותן לפי זמן עצמו של גוף נופל או כדור קורס. לצופה במנוחה מחוץ לרדיוס הגרביטציוני, היחס הקובע בין זמן t לזמן עצמי, ולכן מעניין איך כל הקריסה נראית בזמן t. לפי (42)

(49) $$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

עבור חלקיק במשטח הכדור. נשתמש בזו לתרגיל (45) עבורה.

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 - \frac{1}{E^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^3 \qquad (50)$$

זאת מדויקת. בקרבת הרדיוס הגרביטציוני נותן להצגת האיבר האחרון, ולכן

$$t \cong -\int^{\tilde{r}} \frac{\tilde{r}\, d\tilde{r}}{\tilde{r}-2M} \simeq -2M \ln(\tilde{r}-2M) + \text{const} \qquad (51)$$

ולכן

$$\tilde{r} = 2M + \text{const.} \times e^{-t/2M} \qquad (52)$$

התוצאה מפתיעה. בזמן t התנועה נעצרת ב $r=2M$ וזה רק כשעבור זמן אין-סופי. אין זמן ש t הוא זמן של ראיה כפי הכדור קורס מתחת לרדיוס הגרביטציוני. זה לא אומר שאין קריסה כזו. התמונה פשוט כלאה שנמצאה באמצע הדרך. כיוון שכל מה שקורה בתוך r הוא מעבר לזמן t, קוראים לכך ש $r=2M$ האופק, או יותר מדויק אופק המאורע. צריך לא מחוץ לרדיוס הגרביטציוני מה שקורה בפנים קורה מעבר ל $t=\infty$ ולכן הוא לא ניתן לצפייה על זה כל אינפורמציה. אפשר לראות זה גם מהטיית הקונוס האור באופק ב (48).

העובדה שזמן t נגמר לצופה החיצוני לפני שהכדור נכנס בתוך האופק מסתדרת עם ההבחנה הקודמת שבתוך האופק התפקיד "זמני" עובר מ t ל r. נשים לב שלפי מטריקת שוורצשילד, (27) שטח כל כדור עם מרכז בראשית הוא $4\pi r^2$. אם r נחשב כזמן במובן שהוא קטן בכוון ההתפתחות, אזי הכדור הזה הולך וקטן. זאת אומרת, לא רק החומר קורס באיזור בתוך האופק, גם המרחב קורס.

ה. משטח הסחה לאדום אין-סופית

ניקח שני צופים במנוחה מחוץ לכדור הקורס ומחוץ לאופק, אחד ב r_1 ואחד ב $r_2 > r_1$. לפי (2.70) יחס התדירות ש צופה 1 מודד לתדירות ש 2 מודד של אותה קרן אור שעוברת ליד שניהם הוא

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{1-2M/r_1}}{\sqrt{1-2M/r_2}} \qquad (53)$$

כעת נגיד שמשטח הכדור מפיץ אור בתדירות f_0.
אם הכדור רק יהיה חלק ליד נקודה 2, הנקודה מודדת

$$f_2 < f_0 \tag{54}$$

בגלל אפקט דופלר של תנועת הכדור. לכן כאשר האור הזה יגיע לנקודה 1 הוא נמדד

$$f_1 < f_0 \frac{\sqrt{1-2M/r_2}}{\sqrt{1-2M/r_1}} \tag{55}$$

לכן, כאשר הכדור מתקרב לאופק, f_1 שואף לאפס. אומרים ש $r=r_g$ הוא משטח של הסחה לאדום אין-סופית. כתוצאה מהאפקט הזה, הכדור הפסיק להיות נראה לנקודה במנוחה עוד לפני הגעתו לאופק.

עצם בעל אופק מאורע ומשטח של הסחה לאדום אין סופית נקראו "חור שחור". בדוגמתנו שני המשטחים הם באותו מקום. מדוגמת חור שחור Kerr ונדע שהם יכולים להיות שונים.

כתוצאה מההסחה לאדום, שמקטינה את האנרגיה המגיעה מגוף קורס לעולם החיצון, ועל האופק שחוסם כל תקרית או פוטון מלצאת החוצה, מתנתק העצם בתוך החור השחור מהעולם. מסתו מורגשת בשדה הגרביטציוני, גם תנע זוויתי שלו ומטענו החשמלי נותנים אותות. אך פרטים אחרים של פנים חור השחור נמחקים כליל הין. (37)

6. בדיקות תצפיתיות של יחסות הכללית

האם היחסות הכללית מתארת הטבע כמו שהוא? דרך לבדוק זאת היא לנבא אפקטים בשדה גרביטציוני שונים מהניבויים של תורת ניוטון ולהשוות עם המדידות.

התוצאה בסעיף 5ב מאפשרת בדיקה מידית. מטריקת שוורצשילד מתארת את הגרביטציה של כל גוף כדורי, בפרט השמש. אור שתדירותו בזמן הפליטה הוא f_1, ויגיע מפני השמש ע"ד לנקודה מאד רחוקה ממנו בתדירות

$$f_2 = f_1\sqrt{1-\frac{2M}{r_1}} \simeq f_1\left(1-\frac{M}{r_1}-\frac{1}{2}\frac{M^2}{r_1^2}+\dots\right) \tag{56}$$

כך שההסחה לאדום היא:

(57) $$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{f_2 - f_1}{f_1} = -\frac{M}{r_1} - \frac{1}{2}\frac{M^2}{r_1^2} \cdots$$

אפשר לרשום זה רק (25). כיוון שאם נשים את c
יש לנו

(58) $$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{Gm}{c^2 r_1} - \frac{1}{2}\frac{G^2 m^2}{c^4 r_1^2} + \cdots$$

ברור שהנוסחה הישנה מתאימה להסחה לאדום העכשווית
לסדר ראשון בכמות הקטנה

(59) $$Gm/c^2 r$$

כאן קיבלנו תיקון מסדר גבוה שנובע ממשוואות אינשטיין
בלבד. האיבר מסדר ראשון ב (57) או (58) נובע
רק מעקרון השקילות ואינו מהווה בדיקה של משוואות
אינשטיין.

תצפיות ספקטרוסקופיות של השמש, וכוכבים אחרים,
מאפשרות לקבל הסחה מסדר ראשון. עבור השמש
הכמות (59) היא 2×10^{-6}. התצפיות מאשרות
הסחה זו. האפקט מסדר שני הוא בגודל 2×10^{-12}
קטן מדי כדי לראותו בשמש. אך בשנים האחרונות
נבדקה האפשרות למדוד אפקט כזה בלוויין מעל כדה"א.

אפקט אופטי אחר קשור עם צורת מסלול האור
בקרבת גוף מסיבי. כיוון שהמרחב-הזמן עקום
שם, אנו מצפים שהקרן נוטה ממסלולו
הישר. פיזור זה מהווה האפקט של הסטת האור.

השאלה הכללית היא, כיצד מחשבים מסלול
קרן אור במטריקה הכדורית (8). למטריקה
שני וקטורי קילינג ברורים

(60) $$\xi^\mu = (1,0,0,0) = \delta^\mu_0$$

(61) $$\xi^\mu = (0,0,0,1) = \delta^\mu_\varphi$$

לכן, כל חלקיק חפשי יש לו שתי שמורות

(62) $$E = -\xi_\mu U^\mu = e^\nu \frac{dt}{d\sigma}$$

(63) $$\ell = \xi_\mu U^\mu = r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma}$$

כאן לקחנו $\theta = \frac{\pi}{2}$; בגלל הסימטריה ניתן להניח

שהתנועה היא כולה במישור המשווה. עבור פוטון
σ הוא פרמטר אפיני, עבור חלקיק בעל מסה
אפשר לקחת σ כזמן עצמי.

נרמול המהירות או התנאי של מסלול זמני
או אור נתון

(64) $$-e^{\nu}\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 + e^{\lambda}\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2 = -\epsilon$$

כאשר $\epsilon=+1$ עבור חלקיק מסיבי, $\epsilon=0$ עבור אור.

כעת נחליף $dt/d\sigma$ ו- $d\varphi/d\sigma$ בעזרת (62) ו-(63)
ונבטא $dr/d\sigma$ במונחים של $dr/d\varphi$:

(65) $$-e^{-\nu}E^2 + e^{\lambda}\frac{\ell^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2} = -\epsilon$$

מכאן אנו מקבלים עבור $dr/d\varphi$ ועושים קוודרטורה

(66) $$\varphi = \int^r \frac{\ell\, e^{\lambda/2}\, dr}{r^2\sqrt{E^2 e^{-\nu} - \frac{\ell^2}{r^2} - \epsilon}}$$

$$= \ell\int \frac{dr}{r\sqrt{E^2 e^{-(\nu+\lambda)}r^2 - \ell^2 e^{-\lambda} - \epsilon e^{-\lambda} r^2}}$$

במטריקת שוורצשילד $\nu+\lambda=0$, $e^{-\lambda} = 1-\frac{2M}{r}$
לכן

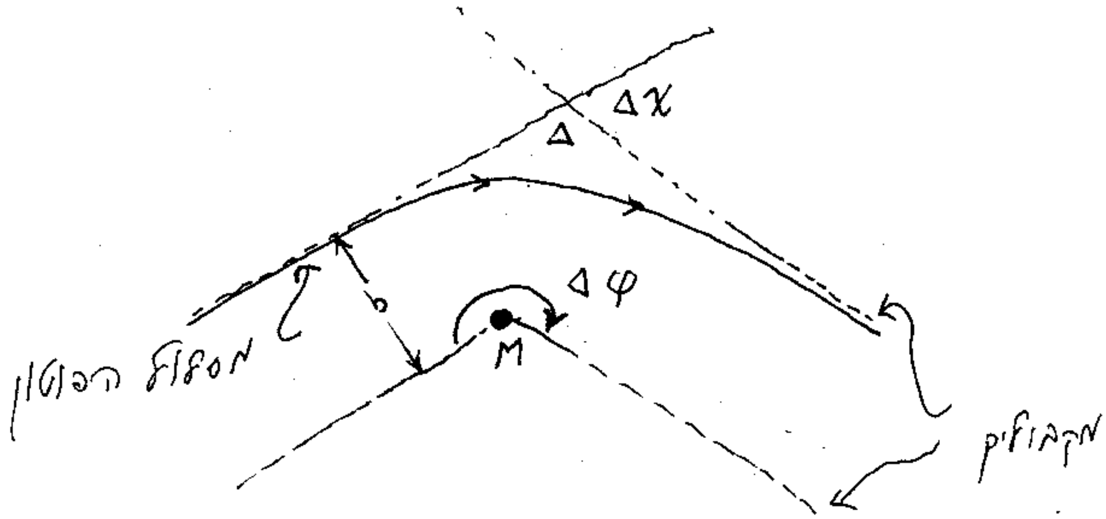
(67) $$\varphi = \ell\int^r \frac{dr}{r\sqrt{E^2 r^2 - \ell^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) - \epsilon r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)}}$$

בשלב זה נתרכז בתנועת פוטון, לכן $\epsilon=0$. עבור
פוטון E פרופורציונלי לאנרגיה ו-ℓ לתנע הזוויתי,
וקבוע הפרופורציה אותו קבוע לשניהם. לכן

(68) $$\frac{\ell}{E} = \frac{\hbar\omega/c\cdot b}{\hbar\omega} = \frac{b}{c} \rightarrow b$$

כאשר b הוא פרמטר הפגיעה של הפוטון בעוברו במרחק מ $r=0$.
יש לחשב את השינוי של φ עבור כל המסלול ולהסיק את זווית
ההסטה באור $\Delta\chi$ לפי התנועה

(69)



אנו רואים שמסימטריה

$$2\Delta\chi + \Delta = \Delta\varphi \tag{70}$$
$$\Delta\chi + \Delta = \pi$$

שמהן מקבלים

$$\Delta\chi = \Delta\varphi - \pi = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr/r}{\sqrt{(r/b)^2 - 1 + 2M/r}} - \pi \tag{71}$$

כאן לקחנו בחשבון שהאינטגרל ב (67) מנקודת ההתקרבות המקסימלית r_0 עד ∞ נותן חצי מהזווית $\Delta\varphi$. כל מה שיש לעשות עכשיו הוא לחשב האינטגרל.

במונחים של המשתנה $x = r/b$ מדובר על

$$I = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x}{\sqrt{x^2 - 1 + 2\left(\frac{M}{b}\right)\frac{1}{x}}} \tag{72}$$

x_0 שורש המכנה

דרך אפשרית לחשב I היא לפתח בטור בחזקות הקטנה M/b. מופיע אז אינטגרל מהצורה

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x^2}{(x^2-1)^{3/2}}$$

שמתבדר. לכן כדאי לכתוב

$$I = -2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x}\sqrt{x^2 - \alpha + 2\frac{M}{b}\frac{1}{x}}\ \Bigg|_{\alpha=1} \tag{73}$$

$$= \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x}{\sqrt{x^2-\alpha}}\Bigg|_{\alpha=1} - 2\frac{M}{b}\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x^2}{\sqrt{x^2-\alpha}}\Bigg|_{\alpha=1}$$

מהטבלאות

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x}{\sqrt{x^2-\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sec^{-1}\left|\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right| \Bigg|_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} \tag{74}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx/x^2}{\sqrt{x^2-\alpha}} = \frac{\sqrt{x^2-\alpha}}{\alpha x} \Bigg|_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} = \frac{1}{\alpha} \tag{75}$$

לכן

$$I = \frac{\pi}{2} + 2\frac{M}{b} \tag{76}$$

ולפי (71)

$$\Delta\chi = \frac{4M}{b} = \frac{4Gm}{bc^2} \tag{77}$$

עבור השמש עם b שווה לרדיוס, $\Delta\chi = 1.75''$.

כאשר טרם נוסחה תורת היחסות הכללית, השתמש איינשטיין בעזרת ארגומנטים מתורת היחסות הפרטית ועקרון השקילות כדי לחשב $\Delta\chi$, וקבל חצי מ-(77). היום ברור שזה נובע מזה שרק האפקט הפוטנציאלי של g_{00} נלקח בחשבון. אפשרי גם לחשב כזו סטייה בתורה ניוטונית אם חושבים על אור כעל חלקיקים הנעים במהירות c. עם תורת היחסות הכללית חשב איינשטיין (77). הניבוי נבדק ע"י שתי משלחות אסטרונומיות בזמן ליקוי החמה ב-1919.

עוד אפקט אופטי שמשמש לבדיקת היחסות הכללית הוא פיגור האור. הזמן שלוקח לקרן אור לעבור בין 2 נקודות מתארך כאשר מסה נמצאת בדרך. החישוב של אפקט הזה הוא גם דרך (64) כאשר מחליפים $d\phi/dr$ ב-dt/dr. (38)

ג. נקיפת הפריהליון היחסותית

במכניקה ניוטונית המסלול של גוף קשור למסה ע"י גרביטציה בלבד הוא אליפסה סגורה, ז"א שנקודת ההתקרבות המירבית בין שני הגופים, הפריהליון במקרה של שמש ופלנטה, נשארת קבועה.

ביחסות כללית הפריהליון מתקדם לאט בכל המסלול — זהו אפקט רלטיביסטי. נתחיל החישוב מ-(67) עם $\epsilon = 1$, ז"א אנו מסתכלים על חלקיק בעל מסה (כמו נטול מסה) המוטר בגאודזית דמוית זמן מסביב למסה m עם $M = Gm$. לפי (67) שינוי הזווית ϕ לאחר מחזור האורביטלי שלם (פנימה וחוצה) הוא

$$\Delta\varphi = 2\ell \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr/r}{\sqrt{(E^2-1)\,r^2 - \ell^2 + 2Mr + 2M\ell^2/r}} \tag{78}$$

נשווה זה עם התנועה הניוטונית. שם

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{M}{r} = E_{nr} \tag{79}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \ell \tag{80}$$

אם נחשב משני אלה את $\Delta\varphi$ למחזור רדיאלי אחד לפי אותה שיטה כבמקרה הרלטיביסטי נקבל

$$\Delta\varphi_N = 2\ell \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr/r}{\sqrt{2E_{nr} r^2 - \ell^2 + 2Mr}} \tag{81}$$

כל ההבדל בין (81) ל-(78) הוא האבר $2M\ell^2/r$ בשורש. מבחינה ניוטונית היינו מקבלים התנהגות (78) אילו היינו מוסיפים לפוטנציאל הניוטוני $-M/r$ פוטנציאל נוסף $-M\ell^2/r^3$. כמובן גם שב-(81) מופיע $2E_{nr}$ במקום E^2-1 אין לו השפעות לגבי $\Delta\varphi$ כי זה פשוט אומר שמחשבים המסלול עם אנרגיה אחרת. יש לשים לב שאם $E = 1 + E_{nr}$, ההבדל בין E^2-1 ל $2E_{nr}$ הוא E_{nr}^2, כמה מסדר שני. כמובן, $\Delta\varphi_N = 2\pi$.

כעת נכתוב ה $\Delta\varphi$ הרלטיביסטי כך

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{(E^2-1)\,r^2 - \lambda^2 + 2Mr + 2M\ell^2/r}\;\frac{dr}{r}\,\Bigg|_{\lambda=\ell} \tag{82}$$

ונפתח בשורש בכמות הקטנה $2M\ell^2/r$. נקבל

$$\Delta\varphi = \underbrace{\Delta\varphi_N}_{2\pi} - 2M\ell^2 \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr/r^2}{\sqrt{(E^2-1)\,r^2 - \lambda^2 + 2Mr}}\,\Bigg|_{\lambda=\ell} \tag{83}$$

נקרא לאינטגרל בעצמו J. אחרי החלפת משתנה ל- $u = 1/r$ הוא נראה כמו

$$J = \int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{u\,du}{\sqrt{(E^2-1) - \lambda^2 u^2 + 2Mu}} \tag{84}$$

כאן $u_{max} = (r_{min})^{-1}$ וכו'. את השורש ב J נוכל לכתוב

$$\sqrt{} = \lambda\sqrt{(u-u_{min})(u_{max}-u)} \tag{85}$$

כי בתוך השורש יש ביטוי קוודרטי ב u עם שורשים $u = u_{min}$ ו- $u = u_{max}$. לכן

$$J = \frac{1}{\lambda}\int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{u\,du}{\sqrt{(u-u_{min})(u_{max}-u)}} \tag{86}$$

לפי טבלאות אינטגרלים האינטגרל הלא-מסוים כאן הוא

$$-\sqrt{(u-u_{min})(u_{max}-u)} + \frac{u_{min}+u_{max}}{2} \times 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{u-u_{min}}{u_{max}-u}} \tag{87}$$

לכן

$$J = \frac{1}{2}\pi\frac{(u_{min}+u_{max})}{\lambda} \tag{88}$$

יש לזכור שלפי (84) גם u_{min} וגם u_{max} תלויים ב λ. בעצם

$$u_{min} + u_{max} = \frac{2M}{\lambda^2} \tag{89}$$

אם נציב ב (88) ונבצע הגזירה ב (83) נקבל

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{6\pi M^2}{\ell^2} = 2\pi + \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} \tag{90}$$

כדי לקבל הביטוי הסופי השתמשנו בתוצאה הניוטונית עבור אקסצנטריות האליפסה

$$e = \sqrt{1-\ell^2/Ma} \tag{91}$$

זה מספיק מדויק להצבה באופן שהוא כבר מסדר ראשון בתיקונים הרלטיביסטיים.

אם נחזיר c ונזכור ש $M = Gm$ אזי

$$(\Delta\varphi)_{rel} = \frac{6\pi G m}{c^2 a(1-e^2)}$$

לכן תוספת הפריהליון הרלטיביסטי הוא מסדר ריבוע הגרבי-טציוני של המסה או גודל "רדיוס" המסה. לכן התוספה קטנה עבור פלנטות. הכי רצינית עבור כוכב חמה שבו a קטן ו-e גדולה. הפרצסיה שם 43" למאה שנה.
בפולסר הבינרי של טיילור והלס הפרצסיה חזקה יותר כי a קטן מאוד, והיא מסתכמת ב-$360°$ כל מאה שנה. הפרצסיה הרלטיביסטית נסתרה בעוד קוממת של 30 שנה במסלול כוכב חמה.

6. שימושים של הקרוב הלינארי

אי ליניאריות משוואות אינשטיין מקשה על מציאת פתרונות מדויקים שהם רלבנטיות פיסיקליות. לכן התפתחו כל מיני שיטות קירוב. הפשוטה מביניהן היא שיטת הקרוב הלינארי, שנפתח כאן ונשתמש בו בהפעלת הסחת מערכות האינרציאליות

א. הקרוב הלינארי

הקרוב הלינארי, שפגשנו כבר בו בסעיף 1.4 מניח שבאזור מסוים הגאומטריה קרובה מאוד למינקובסקית, ולכן, שאפשר לכתוב המטריקה

(1) $$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

עד כמה ה-$h_{\mu\nu}$ יחודית? נגיד שעושים טרנספורמציות קואורדינטות

(2) $$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu \equiv x'^\mu$$

כאשר ξ^μ הוא שדה וקטורי שנחשב קטן (מסדר ראשון).

(3) $$g_{\mu\nu}(x'^\alpha - \xi^\alpha) = g'_{\alpha\beta}(x'^\gamma)\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$$

כיוון ש

(4) $$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\alpha_\mu + \xi^\alpha_{,\mu}$$

אם נעבוד עד סדר ראשון בכמויות קטנות

$$(5)\qquad g_{\mu\nu}(x'^{\alpha}) - g_{\mu\nu,\alpha}\xi^{\alpha} = g'_{\mu\nu}(x'^{\gamma}) + g'_{\alpha\nu}\xi^{\alpha}_{,\mu} + g'_{\mu\beta}\xi^{\beta}_{,\nu}$$

באגף ימין כל הארגומנטים ב g הם x' ואילו ב ξ הם x. אך אפשר להתעלם מההבדל ולכתוב בכולם x כי ההבדלים הנוצרים מהווים מסדר שני. בנוסף באיבר הראשון באגף שמאל. אם נציב (1) נקבל

$$(6)\qquad \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \underbrace{\cancel{h_{\mu\nu,\alpha}\xi^{\alpha}}}_{O(2)} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} + \xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu}$$

באגף ימין הכנסנו $g_{\alpha\nu}$ ו- $g_{\mu\beta}$ בתוך הנגזרת כי כל גורם שנוצר הוא מסדר שני. לכן

$$(7)\qquad h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

39 כאן יש לראות הארגומנטים כ-x. אם רוצים ש $h_{\mu\nu}$ נשארים קטנים לשנוי - יש חופש כיול.

כיוון ש $h_{\mu\nu}$ הוא קטן מסדר ראשון הרמת אינדקס שלו יכולה להיעשות ע"י המטריקה η כי השגיאה המרובה בזה הוא מסדר שני. כמו כן ניתן להגדיר העקבה

$$(8)\qquad h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$$

ואת "השדה הגרביטציוני" הנוסף

$$(9)\qquad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

כיוון ש

$$(10)\qquad \bar{h} = -h$$

ההפוך של הקשר הזה הוא

$$(11)\qquad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

כעת, למשל ב (4.50) אפשר לכתוב $R_{\delta\rho}$ במונחי h עד סדר ראשון

$$(12)\qquad R_{\delta\rho} = \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\left(h_{\gamma\alpha,\delta\rho} - h_{\delta\gamma,\alpha\rho} - h_{\rho\alpha,\delta\gamma} + h_{\delta\rho,\alpha\gamma}\right)$$

נחשב את העקבה, ונעשה החלפות לפי (10) ו- (11) נקבל

$$(13)\qquad G_{\delta\rho} = \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma}\left(\bar{h}^{\beta}_{\gamma,\alpha\beta}\eta_{\delta\rho} - \bar{h}_{\delta\gamma,\alpha\rho} - \bar{h}_{\rho\alpha,\delta\gamma} + \bar{h}_{\delta\rho,\alpha\gamma}\right)$$

אפשר לפשט צורה זו ע"י הטלת תנאי קואורדינטות
על בסיס החופש לשנות קואורדינטות (ב). נדרוש

$$\bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = \eta^{\nu\alpha}\bar{h}_{\mu\alpha,\nu} = 0 \quad \text{(4 רכיבים)} \tag{14}$$

הנקרא תנאי לורנץ באנלוגיה ל $A^{\mu}{}_{,\mu}=0$ בכתיבת
היחסות הפרטית. האם (14) תמיד אפשרי?
בוא נניח, שהתנאי לא מתקיים. נעשה טרנספורמציה
ל $h'_{\mu\nu}$ לפי (7). אז

$$h' = h - 2\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{15}$$

ולכן

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + (\xi^{\alpha}{}_{,\alpha})\eta_{\mu\nu} \tag{16}$$

הדרישה ש $\bar{h}'_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}=0$ פרושה ש

$$0 = \bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \xi_{\mu,\nu}{}^{,\nu} \cancel{- (\xi^{\nu}{}_{,\nu})_{,\mu} + (\xi^{\alpha}{}_{,\alpha})_{,\mu}} \tag{17}$$

כלומר

$$\Box\xi_{\mu} = \bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} \tag{18}$$

כאן $\Box$ הוא $\partial_\alpha\partial_\beta\eta^{\alpha\beta}$ כמו במרחב מינקובסקי. כיוון
שידוע איך לפתור משוואות הגל
עם מקור, אפשר למצוא את הווקטור ξ_μ המתאים
כדי לאפס $\bar{h}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu}$ לכן תמיד אפשר לדרוש
קיום תנאי לורנץ (14).

תחת תנאי לורנץ 3 איברים בביטוי (13) עבור
$G_{\delta\rho}$ מתאפסים ונשאר האחרון

$$G_{\delta\rho} = \frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\delta\rho} \tag{19}$$

משוואות איינשטיין בקרוב הלינארי הן

$$\Box\bar{h}_{\delta\rho} = -16\pi G\, T_{\delta\rho} \tag{20}$$

יש לשים לב שאז לפי תנאי (14) מתקיים

$$T_{\delta}{}^{\rho}{}_{,\rho} = 0 \tag{21}$$

שבעצם חוק שימור תנע אנרגיה עד סדר המקדם (כאשר $T_{\delta\rho}$
מחושב מסדר h עפ"י (20)).

כבר ציינו שהתורה הלינארית "חיה" במרחב מינקובסקי. ולכן (20) הינה משוואה שאינווריאנטית לורנץ: □ הינו אופרטור סקלרי, $\bar h_{\alpha\beta}$ הינו טנזור ולכן הפתרון $\bar h_{\alpha\beta}$ מקבל חוק טרנספורמציה של טנזור ביחסות פרטית. כך שאנו עוסקים בתורת שדה במסגרת היחסות הפרטית שנותנת תשובות נכונות לשדה החלש ביחסות כללית.

כידוע, פתרון מיוחד של (20) הוא

$$\bar h_{\alpha\beta}(\vec r,t)=4G\int\frac{T_{\alpha\beta}(\vec r\,',t_{ret})}{|\vec r-\vec r\,'|}\,d^3r' \qquad (22)$$

כאשר

$$t_{ret}\equiv t-|\vec r-\vec r\,'|c^{-1} \qquad (23)$$

הינו הזמן המפגר (כתוצאה ממהירות הסופית של האותות). לפתרון (22) ניתן להוסיף פתרון של המשוואה ההומוגנית ((20) בלי המקור). לשאלה נתייחס בסוף הפרק.

ב. שדה הגרביטציה של מערכת קוואזיסטציונרית

בהרבה מערכות בטבע, כמו פלנטות, כוכבים, וגלקסיות, המהירויות המקרוסקופיות נמוכות בהרבה מ-c. אז האפקטים של פיגור האותות קטנים במובן זה שכמות הפיגור שיש לקחת אותה בחשבון באינטגרל (22) די אחידה על כל המערכת אם מניחים שהיא סופית ובעצם מרוחקת מנקודת השדה $\vec r$. אז ניתן להתעלם מפיגור – כלומר לעבוד בסדר נמוך ביותר של מהירות החומר עד שהינו $O(v^0)$. אז מ-(22) עוברים ל

$$\bar h_{\alpha\beta}(\vec r,t)=4G\int\frac{T_{\alpha\beta}(\vec r\,',\tilde t)}{|\vec r-\vec r\,'|} \qquad \tilde t\equiv t-\frac{|\vec r|}{c} \qquad (24)$$

אם כן אנו מקבלים $\bar h_{\alpha\beta}$ מתאימה בעבר של החומר, השדה מתאים למצב החומר כפי שאנו רואים אותו ב-$\vec r$ בזמן t באמצעות אור שרק אז הגיע מהגוף. אין פיגור דיפרנציאלי בקירוב הזה.

אם ניקח המודל של נוזל אידיאלי לחומר (ט.1)

$$T_{00}\simeq\rho \qquad T_{0i}\cong 0 \qquad T_{ij}=p\,\delta_{ij} \qquad (25)$$

יש אבל לציין ש-p לא זניח לגבי ρ רק אם בחומר יש תנועות מיקרוסקופיות רלטיביסטיות!

גם מסתבר שלחץ דומה ל ρ גורם לחומר לנוע מקרוסקופית
במהירות רלטיביסטיות אלא אם כן החומר מוחזק ע"י
שדה גרביטציוני שהוא כבר לא חלש במובן שהנחנו.
כל זה אומר שנתקבל תמונה קונסיסטנטית רק
אם החומר הוא בעל $p \ll \rho$.

לאור כל זה נקרב T_{ij} באפס ונקבל מ (24)
הפתרון

$$\bar{h}_{00}(\vec{r},t) = 4G\int \frac{\rho(\vec{r}\,',\tilde{t})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' = -4\phi(\vec{r},\tilde{t}) \tag{26}$$

$$\bar{h}_{0i} \simeq \bar{h}_{ij} \simeq 0$$

כאן ϕ הוא הפוטנציאל הניוטוני הרגיל לפילוג ρ.
מ (8) ו-(10) נעבור ל $\bar{h} = 4\phi$ ומ (11) נקבל

$$h_{00} = -2\phi \qquad h_{0i} \simeq 0 \qquad h_{ij} = 2\phi\,\delta_{ij} \tag{27}$$

כך שהמטריקה של מערכת קוואזיסטציונרית היא

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{28}$$

החלק $-(1+2\phi)dt^2$ היה הכרחי כדי לתת תנועה
לניוטונית בגבול של מהירויות נמוכות נכונה. אבל
החלק המרחבי הוא חדש ונובע ישירות ממשוואות
איינשטיין. המשוואות (28) עם הקרוב הלינארי לפתרון
שוורצשילד (5.25) מראה קווי דמיון. למעשה במקרה
הכדורי הם אותו דבר, אבל כדי להוכיח זה צריך
לקחת בחשבון שהקואורדינטה

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{29}$$

כאן שונה מ r ב (5.25), וזה משום שהיקף מעגל הוא
$2\pi r$ שם, אך $2\pi r(1-\phi)$ כאן. מטריקה וקואורדינטות
מרחביות שבהן מופיע התבנית $dx^2+dy^2+dz^2$ נקראות
איזוטרופיות.

אפשר להראות ש (28) נותנת את סטיית האור
הנכונה לאותו סדר כמו (5.77), אך היא לא מספיק
מדויקת לתת את נקיפת הפריהליון נכון.
כדי להגיע לזה צריך לקחת איבר במטריקה עד
התנהגות ריבועית לפי ϕ, וזה היה דורש ללכת
לסדר שני ב $h_{\mu\nu}$.

לסדר $O(v)$ מופיע אפקט חדש - הוא גרירת המערכות האינרציאליות עם סבוב הגוף.

כיוון שמתחשבים עתה בתנועות החלק בסדר ראשון ישנו פגור דיפרנציאלי. בהנחה ש $|\vec{r}|$ גדול נוכל לפתח

$$(30) \quad t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \cong t - \frac{|\vec{r}|}{c} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

ולכן

$$(31) \quad T_{\sigma\rho}(\vec{r}', t_{ret}) = T_{\sigma\rho}(\vec{r}', \tilde{t}) + \frac{\partial T_{\sigma\rho}}{\partial t}\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{cr^2} + \dots$$

הצבה ב (22) מראה שהתקון הדיפרנציאלי מתבטל באיברים מסדר $O(1/r^2)$ במטריקה. לגבי h_{00} ו- h_{ij} אלא צריך עלמת המקורות. לגבי h_{0i} אפשר לראות שמדובר ק $O(v^2)$ וזניח.

נקבל משוג איזה איבריק תלויים ל $T_{\sigma\rho}(\vec{r}', \tilde{t})$ לסדר $O(v)$ מהדוגמה של המצב האידיאלי

$$(32) \quad T_{\sigma\rho} = (\rho + p)u_\sigma u_\rho + p\, g_{\sigma\rho}$$

רכיבים ל u_0 הם מסדר $O(v^2)$. לכן רק ב T_{0i} יש תרומה מסדר $O(v)$. זה אומר שלסדר זה ולסדר הקומפוננטים ב- $O(1/r)$, $\bar{h}_{00}$ ו- $\bar{h}_{ij}$ נשארים כמו שהיו. נעבור עכשיו

$$(33) \quad \bar{h}_{0i}(\vec{r}, t) = h_{0i} = 4G\int \frac{T_{0i}(\vec{r}', \tilde{t})\, d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

שוב נעשה פתוח כמו ב (30):

$$(33\tfrac{1}{2}) \quad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

כך ש

$$(34) \quad h_{0i} = \frac{4G}{r}\int T_{0i}\, d^3r' + \frac{4G\vec{r}\cdot}{r^3}\int \vec{r}'\, T_{0i}\, d^3r'$$

שהוא נכון עד סדר $O(1/r^2)$ ו- $O(v)$.

כיוון שהאפקט של סבוב לא ברור כאן נעשה טרנספורמציות קואורדינטות כמו (2) עם

$$(35) \quad \xi^0 = 0, \qquad \xi^i = -2G\int r'^i \frac{T_{00}(\vec{r}', t_{ret})\, d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

כדאי לציין שעם קביעת טרנספורמציה כזו אנו עלולים להרוס תנאי לורנץ (14) שעליו מבוססות המשוואות הליניאריות (20). אך זה לא משנה כי יש לנו כבר הפתרון שבא מ(20) ואנו פשוט מעבירים אותו לקואורדינטות אחרות. לפי (7)

$$(36)\qquad h_{0i}^{(new)} = h_{0i} + 2G\frac{\partial}{\partial t}\int r'^{i}\,\frac{T_{00}(\vec r\,',t_{ret})}{|\vec r-\vec r\,'|}\,d^3r'$$

בדרך הרגילה שהגענו ל(34) נפטרים מההבדל בין t_{ret} ל-t ונפתח לפי ($33\frac{1}{2}$) כדי לקבל

$$(37)\qquad h_{0i}^{(new)} = h_{0i} + \frac{2G}{|r|}\frac{d}{dt}\int r'^{i}\,T_{00}\,d^3r' + \frac{2G\,\vec r}{|\vec r|^3}\cdot\frac{d}{dt}\int \vec r\,'\,r'^{i}\,T_{00}\,d^3r'$$

כדי לפשט הלאה נדרוש שימור תנע-אנרגיה

$$(38)\qquad -\frac{\partial T_{00}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial T_{0i}}{\partial r^i} = 0$$

נכפיל ב r'^i ונאינטגרל, ונעשה אינטגרציה לפי חלקים

$$(39)\qquad \frac{d}{dt}\int r'^{i}\,T_{00}\,d^3r' = -\int T_{0i}\,d^3r'$$

במרחב מינקובסקי אפשר תמיד לבחור מערכת ונחוס בה מרכז המסה של הגוף הוא במנוחה. צ"ל כאן האינטגרל באגף שמאל של (39) יהיה קבוע. ואז האינטגרל באגף ימין יתאפס. אם כי לגרביטציה אין דינמיקה ויש שדה גרביטציוני ויש עדיין המושג של מרחב המינקובסקי ברקע את המערכת לורנץ שלו. מאחר שמלכתחילה בחרנו מערכת לורנץ כך שבה מרכז המסה קבוע. הטרנספורמציה (35) תשנה זה אבל ברור שהתוצאה היא מסדר ראשון ב $h_{\mu\nu}$ (סדר $T_{\mu\nu}$). לכן הרכיבים של $T_{\mu\nu}$ במערכת קואורדינטות החדשה יהיו אותם רכיבים עד סדר ראשון. אם כן, מותר להחליף האיבר הראשון ב h_{0i} ב-(34) באיבר הראשון של התיקון ב (37). נשארנו עם

$$(40)\qquad h_{0i}^{(new)} = \frac{4G\,\vec r}{|\vec r|^3}\cdot\int \vec r\,'\,T_{0i}\,d^3r' + \frac{2G\,\vec r}{|\vec r|^3}\cdot\frac{d}{dt}\int \vec r\,'\,r'^{i}\,T_{00}\,d^3r'$$

מכאן ואילך נבטל הסימון (new)

בעזרת (38) נוכל לעבד את האיבר השני מימין כך: