למה ערך $g^{\alpha\beta}$? נתחיל בגזירת הזהות

(155) $$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$$

(156) $$g_{\beta\gamma} \nabla_\mu g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \cancelto{0}{\nabla_\mu g_{\beta\gamma}} = \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \delta^\sigma_\gamma - \Gamma^\sigma_{\gamma\mu} \delta^\alpha_\sigma$$

$$= \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} - \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} = 0$$

נצמצם אותה ב $g^{\delta\gamma}$ ונקבל

(157) $$\nabla_\mu g^{\alpha\delta} = 0$$

כך שגם המטריקה ההפוכה הינה קבועה קוברינטית.

השלכה חשובה של כל זה הינה שמותר להחליף את סדר גזירה קוברינטית והעלאת והורדת אינדקסים. למשל בביטוי

$$\nabla_\mu T^{\alpha\beta}$$

הורדת אינדקס α שקולה לכתיבת

$$\nabla_\mu T_\alpha{}^\beta$$

עוד השלכה: נגזרת הקוברינטית של צמצום טנזורים הינו שווה לצמצום הנגזרות של הטנזורים, למשל

(158) $$\nabla_\mu A^\alpha B_\alpha = \nabla_\mu A^\alpha \cdot B_\alpha + A^\alpha \nabla_\mu B_\alpha$$

בסיכום נציין שיש ספרים בהם כותבים נגזרת קוברינטית ע"י ; למשל

(159) $$\nabla_\mu A_\alpha = A_{\alpha;\mu}$$

ה. צמוד מינימלי ליחסות כללית

עקרון הקוברינטיות מציע עלינו לכתוב את חוקי הפיסיקה בצורה אינברינטית תחת טרנספורמציות קואורדינטות כלליות. נניח שיש לנו חוקים פרטיים תוך הכללה נגזרות. נגזרות פשוטות וחלקיות אינן בעלי אופי טנזורי אלא אם כן מתקנים על ידי גזירה ספציפית. ולכן החוק כמו שהוא לא מתאים ליחסות כללית ואינו מתאר

נבחר אפקטיב של כבידה. אבל אנו יודעים שבמערכת לורנץ מקומית נעלמות נגזרות ה-$g_{\alpha\beta}$, ואיתן ה-Γ, מתאפסות. זה אומר שנגזרת קווריאנטית נראית כנגזרת רגילה במערכת לורנץ אינרציאלית:

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^{\cdot}_{\mu\,\cdot} \cdots \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (160)$$

לכן, אם בחוק האינווריאנטי לורנץ מחליפים כל נגזרת רגילה בנגזרת קווריאנטית המתאימה, יש לנו חוק שהוא קווריאנטי כללי, ושחוזר לחוק האינווריאנטי לורנץ בכל מערכת אינרציאלית מקומית. אפשר לקבל אותו כחלק מתוכן עקרון השקילות.

כדוגמה ניקח חוק התנועה של חלקיק טעון בשדה אלקטרומגנטי (1.197)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (161)$$

ה-$\frac{dx^\mu}{d\tau}$ הוא וקטור גם בתמורות כלליות. ה-$F^\mu{}_\nu$ הוא טנזור ונשאר כך בתמורות כלליות. אך הנגזרת השניה, מה משמעותה במונחים של טנזורים?

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (162)$$

כדי לעבור לתמורות כלליות נחליף את הנגזרת הפשוטה $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ בקווריאנטית ∇_ν ואז החוק הוא

$$\frac{dx^\nu}{d\tau}\nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (163)$$

או

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu \qquad (164)$$

כאשר

$$\nabla_\nu u^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \qquad (165)$$

וכך נשתמש שוב ב-(162) אזי ש-(163) הופך ל

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (166)$$

כלומר שוב נקח את משוואות מקסוול

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu} \tag{167}$$

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0 \tag{168}$$

ה-J^{μ} הוא כבר וקטור. אם נחליף $,$ ב- $;$ נקבל

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\mu} \tag{169}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\beta\gamma;\alpha} = 0 \tag{170}$$

שהן המשוואות המתאימות בשדה גרביטציוני.

נפתח הנוסחה

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta;\gamma} &= F_{\alpha\beta,\gamma} - \cancel{\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma}F_{\nu\beta}} - \cancel{\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma}F_{\alpha\nu}} \\ F_{\gamma\alpha;\beta} &= F_{\gamma\alpha,\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F_{\gamma\nu} - \cancel{\Gamma^{\nu}_{\gamma\beta}F_{\nu\alpha}} \\ F_{\beta\gamma;\alpha} &= F_{\beta\gamma,\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}F_{\nu\gamma} - \cancel{\Gamma^{\nu}_{\gamma\alpha}F_{\beta\nu}} \end{aligned} \tag{171}$$

על כן אפשר להחליף את (170) בצורה המקורית (168) שהיא בן קואורדינטות כלליות. אבל כיון שכמו ש-$F_{\alpha\beta,\gamma}$ אינו טנזור, המשוואה (168) עם האינדקסים למעלה אינה נכונה. כלומר בצורה זו צריך הנגזרות והאלמנטים אינדקסים אינן מתחלפים.

יש גם לתקן הנוסח הנוסחות הפרטיות לצרך J^{μ} שניתנה ב-(1.203). J^{μ} וקטור. אבן כל $dx^{\mu}/d\tau$ וקטור. אבל

$$\delta^4(x^{\mu} - x^{\mu}_{n}(\tau))$$

אינו סקלר. כי לפי הגדרה

$$\int \delta^4(x^{\mu} - x^{\mu}_{n}(\tau))\, d^4x = 1 \tag{172}$$

אבל הסכמנו שהסקלר הוא $\sqrt{-g}\, d^4x$ ולכן ההגדרה הנכונה של J^{μ} בקואורדינטות כלליות היא

$$J^{\mu} = \sum_{n} e_{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx^{\mu}_{n}}{d\tau} \frac{\delta^4(x^{\mu} - x^{\mu}_{n}(\tau))}{\sqrt{-g}}\, d\tau \tag{173}$$

אין להתפלגות מקצרם כזו. ונכון שבמערכת קואורדינטות כדוריות במרחב אוקלידי, הצורה הנכונה של δ הינה

$$\delta^3(\vec{r}) = \frac{\delta(r)\,\delta(\varphi)\,\delta(\cos\theta)}{r^2} = \frac{\delta(r)\,\delta(\varphi)\,\delta(\theta)}{r^2\sin\theta} \tag{174}$$

וזה בדיוק מה שהיה מופיע ב (173) במטריקה

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

אנו סוג תקין. יש לדעת בקטע (1.210) עבור $T^{\alpha\beta}$ של גז חלקיקים נקודתיים, ושל זרם החלקיקים מ (1.255).

כדוגמה שלישית של זמן מוממלי ניקח משוואת אוילר לנוזל רלטיביסטי. בוחסות פרטיות היא (1.293). גם כאן מתייחס ל ρ ו- p כגדל סקלריים, ו-U^α כגדל וקטור. את טנזור ההטלה צריך להחליף ב

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + U^\alpha U^\beta \tag{175}$$

ואת הנגזרת החלקית בקווריאנטית. לכן המשוואה היא

$$(\rho + p)\, U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = -h^{\alpha\beta} p_{,\beta} \tag{176}$$

ש.ל. החלפנו $p_{,\beta}$ כי נגזרת של סקלר הוא אוטומטית וקטור. בדומה למה שעשינו אחרי (1.296) ניקח כאן הגבול של זרימה איטית ומטריקה כמעט שטוחה:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + O(h) \tag{177}$$

$$U^\alpha \cong (1, \vec{v}) \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{178}$$

אם מהירויות החלקיקים הבודדים גם קטנות נכון גם כן ש (עיין (1.279))

$$\rho + p \simeq \rho \tag{179}$$

אז (176) מתקבלת ל

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{00}\right) \simeq -\delta^{ij} p_{,j}$$

כאן הזנחנו איברים כמו $\Gamma^i_{jk} v^j v^k$. כעת במטריקה סטטית

(180) $$\Gamma^i_{00} = \tfrac{1}{2} g^{ij}\left(g_{0j,0} + g_{j0,0} - g_{00,j}\right) \cong -\tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

כיוון ש $g_{00} \cong -(1+2\phi)$ ונקבל ש

(181) $$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\phi$$

שהוא משוואת אוילר המקורית לנוזל בשדה כובד.

1. גרדיינט, קורל, דיברגנץ באנליזה טנזורית

נגזרת חלקית של סקלר היא אוטומטית נגזרת קווריאנטית. כך הדבר לגבי הקורל. כי

(182) $$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = A_{\mu,\nu} - \cancel{\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}A_\gamma} - A_{\nu,\mu} - \cancel{\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}A_\gamma}$$

נעבור לדיברגנץ של וקטור

(183) $$V^{\mu}{}_{;\mu} = V^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\gamma}V^{\gamma}$$

כעת

(184) $$\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(g_{\nu\mu,\gamma} + g_{\gamma\nu,\mu} - g_{\mu\gamma,\nu}\right)$$

ה $g_{\gamma\nu,\mu} - g_{\mu\gamma,\nu}$ אנטיסימטרי ב μ,ν ולכן מתאפס לאחר הצמצום עם $g^{\mu\nu}$.

(185) $$\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} = \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\gamma}}$$

אפשר לפשט זה הלאה. כי מה שכתוב כאן הוא

(186) $$\Gamma^{\mu}_{\mu\gamma} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{(g)^{-1}\frac{\partial(g)}{\partial x^{\gamma}}\right\}$$

26

כאשר (g) הוא המטריצה $g_{\mu\nu}$ ו $(g)^{-1}$ הוא $g^{\mu\nu}$.

לכל מטריצה $M(x)$ אפשר לחשב שנוי δM כתוצאה מתזוזה אינפיניטסימלית δx^μ. לסדר ראשון

$$\mathrm{Tr}\{M^{-1}\delta M\} = \ln\left(1+\mathrm{Tr}\{M^{-1}\delta M\}\right) \tag{187}$$

$$\mathrm{Det}\,(1+M^{-1}\delta M) = 1+\mathrm{Tr}\{M^{-1}\delta M\} \tag{188}$$

ולכן

$$\mathrm{Tr}\,\{M^{-1}\delta M\} = \ln \mathrm{Det}\left[M^{-1}(M+\delta M)\right] = \ln \frac{\mathrm{Det}\,(M+\delta M)}{\mathrm{Det}\,M} \tag{189}$$

השתמשנו בכלל שמכפלת דטרמיננטים היא דטרמיננטה של מכפלה, והפוך של דטרמיננטה הוא דטרמיננטה של ההפוך.

הלאה,

$$\mathrm{Tr}\,\{M^{-1}\delta M\} = \ln \mathrm{Det}\,(M+\delta M) - \ln \mathrm{Det}\,M = \delta \ln \mathrm{Det}\,M \tag{190}$$

כעת משווה זה עם (186) ונסיק ש

$$\Gamma^\mu_{\mu\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\ln g \tag{191}$$

אבל $g=-(\sqrt{-g})^2$ ולכן

$$\Gamma^\mu_{\mu\gamma} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\sqrt{-g} \tag{192}$$

שהיא נוסחה חשובה מאד.

עם האינפורמציה הזו נכתב (183) בצורה

$$V^\mu_{\ ;\mu} = V^\mu_{\ ,\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\sqrt{-g}\cdot V^\gamma = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\sqrt{-g}\,V^\gamma\right) \tag{193}$$

שדהו מאד נפוצה. למשל, למדנו (1.165) שזרם חשמלי
מקיים משוואת הרציפות ביחסות פרטית

(194) $$J^{\mu}_{,\mu} = 0$$

ביחסות כללית נכתוב זה

(195) $$J^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,J^{\mu}\right) = 0$$

כדי לבדוק צורה של נציב (173) מהמודל המיקרוסקופי

(196) $$J^{\mu}_{;\mu} = \sum_{n} e_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{dx_n^{\mu}}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\delta\left(x^{\mu} - x_n^{\mu}(\tau)\right)d\tau$$

הביטוי הזה בצורת מתאים כתוצאה מהשוויון ביחסות פרטית (1.206). באנלוגיה את חוק שמור החלקיקים נכתוב

(197) $$N^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,N^{\mu}\right) = 0$$

גזירת משקל הדיברגנס של טנזור אנטיסימטרי

(198) $$F^{\mu\nu}_{;\nu} = F^{\mu\nu}_{,\nu} + \cancel{\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma}F^{\gamma\nu}} + \underbrace{\Gamma^{\nu}_{\nu\gamma}}_{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\sqrt{-g}} F^{\mu\gamma}$$

(199) $$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}\right)$$

תכונה מעניינת וברורה היא שבגלל האנטיסימטריות

(200) $$F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)\right)$$

כי הרי $F^{\mu\nu}_{;\nu}$ הוא וקטור. אבל כאן שתי גזירות חלקיות
חליפיות זה מתאפס, ולכן אם $F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$

(201) $$F^{\mu\nu}_{;\nu;\mu} \equiv 0$$

באופן דומה עבור (201) ניקח דיברגנס של משוואות מקסוול (96ב) ונקבל

$$J^\mu{}_{;\mu} = 0 \tag{202}$$

כלומר חוק שימור מטען נובע ממשוואות מקסוול.

כעת ננסה להשתמש ב (197) בעניין חוק שימור תנע אנרגיה. החוק הוא

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{203}$$

ביחסות פרטית, ולפי עקרון הצימוד המינימלי,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

ביחסות כללית. ההגדרה של נגזרת קווריאנטית נותנת

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\gamma\nu} T^{\gamma\nu} + \underbrace{\Gamma^\nu_{\gamma\nu}}_{\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\sqrt{-g}} T^{\mu\gamma} \tag{204}$$

ולכן

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^\mu_{\gamma\nu} T^{\gamma\nu} = 0 \tag{205}$$

האיבר השני באגף שמאל לא מתאפס, ולכן תהיה הבדל גדול בין חוק-שימור תנע-אנרגיה לבין חוק שימור מטען ומספר חלקיקים (195) ו-(197). אותם אפשר לכתוב

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(\sqrt{-g}\, J^0\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, J^i\right) = 0 \tag{206}$$

שדומה לצורה של משוואת רציפות. לא כך (205). ההבדל יותר ברור כאשר כותבים את חלקו השמאלי בצורה גלובלית, לאחר פונים עתה להרגשת הכלי המתמטי הנתון, משפט גאוס המוכלל.

5. היפרמשטחים ומשפט גאוס

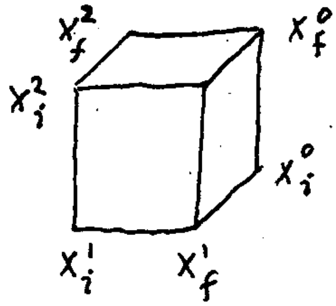
ניקח דיברגנס של וקטור $V^\alpha{}_{;\alpha}$ ונאינטגרל אותו על פני אזור 4-ממדי במרחב-זמן בצורה כזו כדי לקבל סקלר. זה דורש אלמנט נפח $\sqrt{-g}\, d^4x$ ולכן אנו מתרכזים ב

$$I \equiv \int_V V^\alpha_{\ ;\alpha} \sqrt{-g}\, d^4x \qquad (207)$$

לאור (193) זה הופך ל

$$I = \int_V \left(\sqrt{-g}\, V^\alpha\right)_{,\alpha} d^4x \qquad (208)$$

כעת, לצורך פשטות, נקבע שהאזור ה 4-ממדי V הוא מלבני. כל תחום של כל קואורדינטה אחיד בכל האזור. אזי אם נבצע האינטגרציות המתבקשות ב (208) נקבל



$$I = \int \sqrt{-g}\, V^0 dx^1 dx^2 dx^3 \Big|_{x_i^0}^{x_f^0} + \int \sqrt{-g}\, V^1 dx^0 dx^2 dx^3 \Big|_{x_i^1}^{x_f^1} + \int \sqrt{-g}\, V^2 dx^0 dx^1 dx^3 \Big|_{x_i^2}^{x_f^2} + \int \sqrt{-g}\, V^3 dx^0 dx^1 dx^2 \Big|_{x_i^3}^{x_f^3} \qquad (209)$$

נפרט: אינטגרל הראשון הוא הפרש שני אינטגרלים על פני הנפח ה 3-ממדי, האחד ב"זמן" הסופי x_f^0 והשני בזמן ההתחלתי x_i^0. האינטגרל השני הוא הפרש של אינטגרל על שטח 3-ממדי [על "זמן"] בקואורדינטה x_f^1 ובקואורדינטה x_i^1, וכו'. אם נגדיר הסימון

$$d\Sigma_0 = \pm\sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 \qquad \text{ב } x^0 = \text{const.}$$
$$d\Sigma_1 = \pm\sqrt{-g}\, dx^0 dx^2 dx^3 \qquad \text{ב } x^1 = \text{const.} \qquad (210)$$
$$\vdots$$

ואת הסימון עד עבור כל ההיפרמשטחים ה 3-ממדים שמופיעים ב (209), הרי ש

$$I = \int_{\partial V} V^\alpha d\Sigma_\alpha \qquad (211)$$

27

כאן מובן שבמשטחים x_f^1, x_f^0 ה $d\Sigma_\alpha$ מופיעים עם סימן חיובי, ובמשטחים x_i^0, x_i וכו' $d\Sigma_\alpha$ עם סימן שלילי. בנוסחה $d\Sigma_\alpha$ נראה כאילו

האם וקטור. באיזה מובן?

כדי לראות זה נגדיר ארבע-וקטור של נפח 3-ממדי על המשטח x^0_f לפי (כאן $\epsilon'_{\mu\alpha\beta\gamma} = \sqrt{-g'}\, e_{\mu\alpha\beta\gamma}$)

$$d\Sigma'_\mu \equiv \epsilon'_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^2} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^3} dx^1 dx^2 dx^3 \tag{212}$$

כאן x'^α הן הקואורדינטות כלליות, לא בהכרח מותאמות עבור המשטח. אם בכל זאת נבחר אותן להיות $x^0x^1x^2x^3$ המקוריות, נקבל

$$d\Sigma_0 = \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3, \quad d\Sigma_1 = d\Sigma_2 = d\Sigma_3 = 0 \tag{213}$$

על כן, עם ההגדרה החדשה (212) התרומה של המשטח x^0_f באינטגרל I הוא בדיוק

$$\int_{x^0_f = const} V^\alpha d\Sigma_\alpha$$

במשטח x^0_i והיה צריך לקחת $d\Sigma_\mu$ עם סימן שלילי לנוסחה (212), והתוצאה הוא שהאנך לפני משטח כלפי חוץ הוא בכוון הפוך לכוון הקואורדינטה x^0.

באותה מידה, עבור המשטח $x^1_f = const.$ נגדיר הוקטור של נפח כך

$$d\Sigma'_\mu = -\epsilon'_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^2} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^3} dx^0 dx^2 dx^3 \tag{214}$$

ואז אם נשתמש בקואורדינטות $x^0x^1x^2x^3$ נקבל

$$d\Sigma_0 = 0, \quad d\Sigma_1 = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^2 dx^3, \quad d\Sigma_2 = d\Sigma_3 = 0 \tag{215}$$

הסימן של $d\Sigma'_\mu$ נבחר הפוך עבור המשטח $x^0_i = const$ כדי להתאים הסימנים להגדרה (206). תמיד הכלל יהיה שהוקטור $d\Sigma_\lambda$ פונה לכוון האנך החיצוני למשטח.. וכו'

למדנו מכל זה שעל כל משטח 3-ממדי (לא חייב להיות שטוח) ניתן להגדיר אלמנט נפח. בוחרים 3 קואורדינטות המפרמטרות המשטח (כמו $x^0x^1x^2$ מפרמטרות את $x^3_i = const.$), נגיד a, b, c, ומגדירים

$$d\Sigma_\mu = \pm \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial a} \frac{\partial x^\beta}{\partial b} \frac{\partial x^\gamma}{\partial c} da\, db\, dc \tag{216}$$

שוב, הסימן נלקח בצורה כזו ש-$d\Sigma_\mu$ מכוון עם האנך החיצוני ל-∂V.

עם ההגדרות האלה משפט גאוס אומר

$$(217) \qquad \int_V V^\alpha{}_{;\alpha}\sqrt{-g}\,d^4x = \int_{\partial V} V^\alpha\, d\Sigma_\alpha$$

כדוגמה ניקח $V^\alpha = J^\alpha$ הזרם החשמלי. כיוון ש-$J^\alpha_{;\alpha}=0$ משפט גאוס נותן

$$(218) \qquad \int_{\partial V} J^\alpha\, d\Sigma_\alpha = 0$$

כאשר V הוא כל אזור 4-ממדי. נבחר צדדיו לקואורדינטות $x^0x^1x^2x^3$ ול-V המלבני. אזי

$$(219) \qquad \int_{x^0_f}\sqrt{-g}\,J^0dx^1dx^2dx^3 - \int_{x^0_i}\sqrt{-g}\,J^0dx^1dx^2dx^3 + \dots = 0$$

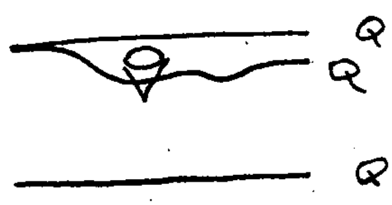
ה ... הן התרומות במשטחים x^1_f, x^2_i וכו' של הרכיבים J^1, J^2, J^3. אם נוסיף שאין זרם החשמלי מתפרץ עד מרחק גדול, נלך להגדרות המלבן כך שהתרומות של הדפנות x^1_f וכו' תתאפסנה ואז נקבל שעבור האינטגרל על נפח האינסופי

$$(220) \qquad Q \equiv \int_\infty \sqrt{-g}\,J^0dx^1dx^2dx^3 = \text{const.} \neq f(x^0)$$

זה, כמובן, השימור של מטען Q, שכן ה-Q שווה בכל זמן.

יש להדגיש שאין צורך לקחת במשטח x^0_f כבאמת בעל זמן קבוע. מספיק שהמשטח יהיה משטח דמוי מרחב במובן שהאנך לו הוא בכוון דמוי זמן. לכן בפרט נכון שהחוק (218) אומר יותר מסתם שימור מטען במשך הזמן. הוא גם אומר שהמטען אינווריאנטי תחת שינוי המשטח הדמוי מרחב. בתמונות

(221)



ח. וקטור קילינג ושמור תנע אנרגיה

במרחב מינקובסקי, או כאשר הכבידה זניחה, החוק (205) הופך ל (203) ואז יש לנו 4 חוקי שמור בצורה של משוואות רציפות:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{\mu 0} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\mu i} = 0 \qquad (222)$$

(השתמשנו בקואורדינטות לורנץ). אז ניתן להוכיח כמו בסעיף ג' ש

$$P^\mu = \int T^{\mu 0}\, dx^1 dx^2 dx^3 \qquad x^0 = const. \qquad (223)$$

הן 4 שמורות. על שהערך של כל P^μ לא משתנה כאשר מעתיקים היפר משטח $x^0 = const.$, אבל הוא נשאר דמוי מרחב.

הפרשנות היא: P^0 הוא האנרגיה של החומר המתואר ע"י $T^{\mu\nu}$ ו- P^i הן רכיבי התנע המתאימים. ברור ש- P^μ הינו 4-וקטור.

ברגע שיש כבידה התמונה הזה מסתבכת, שכן לא אפשר להפטר מהאיבר האחרון ב (205) בשום מערכת קואורדינטות (מעבר לאיזור קטן מאוד).

כאשר ישנה סימטריה במערכת, ניתן לכתוב שוב חוק בצורה של רכיבים מסוימים של תנע-אנרגיה ולקבל ממנו חוק שמור גלובלי. לצורך זה נפתח כאן הרעיון של וקטור Killing.

נניח שישנה סימטריה בשדה הכבידה בחלופן שהתצוגה

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon\, \xi^\mu \qquad (224)$$

(ϵ קבוע אינפיניטסימלי, ξ^μ וקטור לא קבוע) לא משנה המטריקה. למשל, בסימטריה כדורית נוחה ξ^μ כולו בכוון φ, וכו'. נעבור למערכת קואורדינטות ספציפית x'^μ מתוכננת כך שלוקטור ξ^μ יש רק רכיב אחד לא אפס, למשל

$$\xi'^\mu = \delta^\mu_\kappa \qquad (225)$$

זה ניתן, אולי לא על פני כל מרחב-הזמן, אבל כן על אזור גדול, לא בהכרח מערכת לוקלית בלבד.

במערכת החדשה נחשב $\xi'_{\mu;\nu}$. ברור ש $\xi'_\mu = g'_{\mu\kappa}$. לכן

$$\xi'_{\mu;\nu} = g'_{\mu\kappa,\nu} - \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu}\, g'_{\alpha\kappa} \qquad (226)$$

אבל

(227) $$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu}\, g'_{\alpha\kappa} = \frac{1}{2}\left(g'_{\kappa\mu,\nu}+g'_{\nu\kappa,\mu}-g'_{\mu\nu,\kappa}\right)$$

האבר האחרון מתאפס עקב הסימטריה, ולכן

(228) $$\xi'_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\kappa,\nu} - g_{\nu\kappa,\mu}\right)$$

צ"ל $\xi'_{\mu;\nu}$ אנטיסימטרי. לכן $\xi'_{\mu;\nu}+\xi'_{\nu;\mu}=0$. המשוואה הזו טנזורית, ולכן תתקיים בכל מערכת קואורדינטות. על כן הווקטור ξ, הנקרא וקטור קילינג, יקיים תמיד

(229) $$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

זאת נקראת משוואת קילינג.

28

אם יש למשוואת קילינג n פתרונות, ישנן n סימטריות בגאומטריה. כי אלה יפתרו גם כאשר המטריקה כתובה כך שתלוי, אז כל הסימטריות תלויות.

וקטור קילינג נותן דרך מהירה לפתור את שמור התנועה שמודלנו בסעיף ב.ו. אם U^α הוא מהירות חלקיק חפשי ו ξ^α הוא וקטור קילינג, נסתכל על קצב שנוי הכמות $U^\alpha\xi_\alpha$

(230) $$\frac{d}{d\tau}\left(U^\alpha \xi_\alpha\right) = \frac{dU^\alpha}{d\tau}\xi_\alpha + U^\alpha \frac{d\xi_\alpha}{d\tau}$$
$$= -\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} U^\gamma U^\beta \xi_\alpha + U^\alpha \xi_{\alpha,\beta} U^\beta$$
$$= \left(\xi_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\xi_\gamma\right) U^\alpha U^\beta = \xi_{\alpha;\beta} U^\alpha U^\beta$$

וזה מתאפס עקב אנטיסימטריות $\xi_{\alpha;\beta}$ ממשוואת קילינג. לכן, לכל וקטור קילינג יש שמורה

(231) $$U^\alpha \xi_\alpha = \text{const.}$$

לחלקיק חפשי. אם נשתמש בבחירה המיוחדת $\xi^\alpha = \delta^\alpha_\kappa$ אז,

(232) $$U^\alpha \xi_\alpha = g_{\alpha\beta} U^\alpha \xi^\beta = g_{\kappa\beta} U^\beta$$

וזו אותה שמורה שגילינו בסעיף ב.ו.

כאשר יש וקטור קילינג ניתן גם לכתוב חוק רציפות לרכיב אחד של טנזור אנרגיה. למשל והיה ξ^μ וקטור קילינג, ונגדיר וקטור נוסף, וקטור Poynting,

$$J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu \tag{233}$$

אזי

$$J^\mu{}_{;\mu} = \underbrace{T^{\mu\nu}{}_{;\mu}}_{0}\,\xi_\nu + T^{\mu\nu}\underbrace{\xi_{\nu;\mu}}_{\text{אנטיסימטרי}} = 0 \tag{234}$$

על כן, לפי (193) יש לנו חוק רציפות

$$\left(\sqrt{-g}\,J^\mu\right)_{,\mu} = \left(\sqrt{-g}\,T^\mu{}_\nu\xi^\nu\right)_{,\mu} = 0 \tag{235}$$

ולפי משפט גאוס

$$\int_{\text{עס}} T^\mu{}_\nu\,\xi^\nu\,d\Sigma_\mu = 0 \tag{236}$$

למשל, ניקח ה ע של סעיף ב, ונניח ש $T^\mu{}_\nu$ דועך באין סוף המרחבי (חומר ממוקם). אזי

$$\int_{x^0=const} T^0{}_\nu\,\xi^\nu\,d\Sigma_0 = \text{שמור} \tag{237}$$

לפי אותה לוגיקה כמו (218)-(219). וכמו כן, לפי דוגמת (220) אין באינטגרל משתנה אם מזיזים הפרמטשת עליו הוא עשוי. אם הסימטריה היא כזו ש ξ^μ הוא וקטור דמוי זמן ואפשר לקבוע קואורדינטת זמן x^0 לפי אותו וקטור כך ש

$$\xi^\mu = \delta^\mu_0 \tag{238}$$

אזי השמירה היא

$$\int_{x^0=const} T^0{}_0\,d\Sigma_0 = \int_{x^0=const}\sqrt{-g}\,T^0{}_0\,dx^1dx^2dx^3 \tag{239}$$

יש לפרש זו כמינוס האנרגיה של החומר, בגלל הקרבה בין סימטריה בזמן לאנרגיה, וגם בגלל ש T_{00} נחשב צפיפות אנרגיה. אם ξ^μ דמוי מרחב אפשר לקבל זוית מקואורדינטות המרחב קווית לפניו

ואז, למשל,

$$\xi^\mu = \delta^\mu_1 \tag{240}$$

כך שהשמורה היא

$$\int_{x^0=\text{const.}} T^0_1\, d\Sigma_0 = \int \sqrt{-g}\, T^0_1\, dx^1dx^2dx^3 \tag{241}$$

וניתן לראות שמדובר פה ברכיב תנע בתנאי שהסימטריה היא סימטרית הזזה. ואם הסימטריה היתה סבוב ואז לנו רכיב מתאים של תנע זוויתי שמור.

כדוגמה של כל זה נמצא ונעשה שימוש בווקטורי קילינג של המטריקה (מטריקת Rindler)

$$ds^2 = -v^2du^2 + dv^2 + dy^2 + dz^2 \tag{242}$$

ראשית כל נחשב ה-Γ מעקרון הפעולה המינימלית

$$\delta\int\left[-v^2\dot u^2 + \dot v^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right]^{1/2} d\tau = 0 \tag{243}$$

כאשר כאן τ משמש מלכתחילה כפרמטר העקומה.
לכן, אחרי הווריאציה נשים מיד $\sqrt{\ } = 1$.

$$0 = \int\left[-2v\dot u^2\delta v - 2v^2\dot u(\delta u)' + 2\dot v(\delta v)' + 2\dot y(\delta y)' + 2\dot z(\delta z)'\right]d\tau \tag{244}$$

לאחר אינטגרציה לחלקים

$$0 = \int\left[-2v\dot u^2\delta v + 2v^2\ddot u\,\delta u + 4v\dot v\dot u\,\delta u - 2\ddot v\,\delta v - 2\ddot y\,\delta y - 2\ddot z\,\delta z\right]d\tau \tag{245}$$

אנו מקבלים משוואת הגאודסיות לרכיבים:

$$\ddot u + 2\frac{\dot v}{v}\dot u = 0 \qquad \Gamma^u_{uv} = \frac{1}{v}$$

$$\ddot v + v\dot u^2 = 0 \qquad \Gamma^v_{uu} = v \tag{246}$$

$$\ddot y = 0$$

$$\ddot z = 0$$

Γ אחרים מתאפסים!

כיוון שהמטריקה לא תלויה ב y, z או u שלושה וקטורי קילינג הם

$$(247)\qquad {}^{(1)}\xi^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{u} \qquad {}^{(2)}\xi^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{y} \qquad {}^{(3)}\xi^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{z}$$

נבדוק במישרין שאלה מקיימים משוואת קילינג. לפי הערכים של Γ ב (246), (229) הופכת ל

$$(248)\qquad \begin{aligned} &\xi_{u,u} - v\,\xi_{v} = 0 \\ &\xi_{v,v} = 0 \\ &\xi_{u,v} + \xi_{v,u} - \tfrac{2}{v}\,\xi_{u} = 0 \end{aligned}$$

כאשר כל ה $\xi_{\alpha,\beta}+\xi_{\beta,\alpha}$ האחרים מתאפסים. הרכיבים הקוברינטים של וקטורי קילינג הם

$$(249)\qquad {}^{(1)}\xi_{\alpha} = g_{\alpha u} = -v^{2}\delta^{u}_{\alpha} \qquad {}^{(2)}\xi_{\alpha} = \delta^{y}_{\alpha} \qquad {}^{(3)}\xi = \delta^{z}_{\alpha}$$

ואלה מקיימים משוואות (248).

לפי (231) יש לנו מיד 3 שמורות לחלקיק חופשי

$$(250)\qquad {}^{(1)}C = g_{\alpha u}\frac{du}{d\tau} = -v^{2}\frac{du}{d\tau}\,; \quad {}^{(2)}C = \frac{dy}{d\tau}\,; \quad {}^{(3)}C = \frac{dz}{d\tau}$$

ברור ש- ${}^{(2)}C$ הוא התנע בכוון y, וכו'. ומה ${}^{(1)}C$?
בתרגיל גילינו שהמטריקה ב (242) מוצגת מרחב מינקובסקי כאשר הקואורדינטות הרגילות נתונות ע"י

$$(251)\qquad \begin{aligned} t &= v\sinh u \\ x &= v\cosh u \end{aligned}$$

חשבון פשוט מראה ש

$$(252)\qquad x\frac{dt}{d\tau} - t\frac{dx}{d\tau} = -v^{2}\frac{du}{d\tau} = {}^{(1)}C$$

כיוון ש $dt/d\tau$ שמורה, הרי ששמורת ${}^{(1)}C$ אומרת פשוט שהתנועה היא אחידה בכוון x (השמורה "מרכז המסה"; השווה עם 1.245).

29

נחפש עוד וקטור קילינג. המשוואה האמצעית (248) אומרת ש ξ_{v} אינו פונקציה של v. נקח

$$(253)\qquad \xi_{v} = f'(u)$$

כאשר f פונקציה לא ידועה. מהראשונה ב (248) נובע הפתרון המיוחד

$$\xi_u = v\, f(u) \tag{254}$$

הצבה של כל זה באחרונה ב (248) נותן

$$f'' - f = 0 \tag{255}$$

פתרון אחד הוא $f = \cosh u$ כך שוקטור קילינג הוא

$$^{(4)}\xi_u = v \cosh u \qquad ^{(4)}\xi_v = \sinh u \tag{256}$$

ורכיביו האחרים אפס. על כן לחלקיק חפשי יש שמורה

$$^{(4)}C = v \cosh u \frac{du}{d\tau} + \sinh u \frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(v \sinh u) \tag{257}$$

לפי (251) שמורה זו הוא פשוט $dt/d\tau$ שהוא, עד כדי סימן האנרגיה של החלקיק.

עוד פתרון של (255) הוא $f = \sinh u$ שנותן

$$^{(5)}\xi_u = v \sinh u \qquad ^{(5)}\xi_v = \cosh u \tag{258}$$

השמורה כאן היא

$$^{(5)}C = v \sinh u \frac{du}{d\tau} + \cosh u \frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(v \cosh u) \tag{259}$$

אבל לפי (251) השמורה כאן היא $dx/d\tau$ - התנע בכוון x שאנו יודעים שהוא שמור במטריקה המקורית.

וישנם עוד 5 וקטורי קילינג, אך לא נעסוק בהם.

נשתמש כדוגמה ב $^{(4)}\xi^\alpha$ כדי לכתוב חוק רציפות לתנע-אנרגיה. לפי (235)

$$(v T^{\alpha u} v \cosh u)_{,\alpha} + (v T^{\alpha v} \sinh u)_{,\alpha} = 0 \tag{260}$$

עפ"י (251) הגבול $v\to\infty$ רק סביב $u\to 0$ כך ש vu
אך מתאפס אז מתבדר מתאים לאצור באינסוף
בזמן t נתון. אך החומר שמתואר ע"י $T^{\alpha\beta}$ מאוד מצומצם
דרוש ש $T^{\alpha\beta}$ יתאפס כאשר $v\to\infty$ אז $\infty\to$ וכו'.
שאינטגרל (260) על פני כל התלת-מרחב $z\,y\,v$
כדי לקבל

$$(261)\qquad \frac{d}{du}\int v\left(v\cosh u\, T^{uu} + \sinh u\, T^{uv}\right)dv\,dy\,dz = 0$$

זהו חוק שמור מהצורה (237). כיוון ש u קואורדינטה
דמוית זמן, זה נראה כמו חוק שמור אנרגיה
במשך זמן u.

כיוון שאותו וקטור קילינג $\xi^{(4)}$ נתן הקבוע $C^{(4)}$
שהיא אנרגיה כגודל של חלקיק, הרי שמדובר כאן
על חוק שמור אנרגיה רגילה של החומר המתואר
ע"י $T^{\alpha\beta}$. נשארת אבל השאלה, של מי הזמן u?
כדי לברר זה נתבונן בצופה העומד במנוחה
בקואורדינטות $z\,y\,v$ ונע ב u שהוא אז הזמן
שלו. מהירות צופה כזה היא

$$(262)\qquad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{1}{v}, 0, 0, 0\right)$$

היא מנורמלת כראוי, התאוצה של הצופה היא

$$(263)\qquad a^\alpha = \frac{dx^\beta}{d\tau}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\gamma\right) = \left(0, \frac{1}{v}, 0, 0\right)$$

ומכאן ש

$$(264)\qquad a^\alpha a_\alpha = \frac{1}{v^2}$$

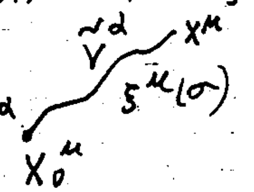
לכן הצופה שמדובר בו הוא צופה מואץ אחיד במרחב מינקובסקי. אנרגיית החומר שמורה לגביו.

4. עקמומיות ומשוואות איינשטיין

א. הובלה במקביל

יהיה וקטור V^α נתון בנקודה X_0^μ, ועקומה רציפה עם משוואה $x^\mu=\xi^\mu(\sigma)$ המתחילה ב X_0^μ.

(1)



נוכל להגדיר וקטור $\tilde V^\alpha$ לאורך העקומה מהדרישה

$$\frac{d\xi^\beta}{d\sigma}\tilde{V}^\alpha{}_{;\beta} = 0 \tag{2}$$

עם תנאי גבול $\tilde{V}^\alpha(x_0^\mu) = V^\alpha$. במילים אחרות יש לפתור המשוואה

$$\frac{d\tilde{V}^\alpha}{d\sigma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{V}^\beta\frac{d\xi^\gamma}{d\sigma} = 0 \tag{3}$$

לאורך עקומתנו החל מ $\tilde{V}^\alpha(x_0^\mu) = V^\alpha$.

ונשים לב ש $\tilde{V}^\alpha$ תלוי לינארית ב- V^α. במרחב מינקובסקי, הרכיבים של $\tilde{V}^\alpha$ זהים לאלה של V^α. לאורך עקומה קצרה במערכת אינרציאלית מקומית, אותו דבר נכון. ואורך הווקטור $\tilde{V}^\alpha$ זהה בכל מקום לזה של V^α כי:

$$\frac{d}{d\sigma}(\tilde{V}^\alpha\tilde{V}^\beta g_{\alpha\beta}) = \frac{d\xi^\mu}{d\sigma}\nabla_\mu(\tilde{V}^\alpha\tilde{V}^\beta g_{\alpha\beta}) \tag{4}$$

$$= \frac{d\xi^\mu}{d\sigma}(\tilde{V}^\alpha{}_{;\mu}\tilde{V}^\beta g_{\alpha\beta} + \tilde{V}^\alpha\tilde{V}^\beta{}_{;\mu}g_{\alpha\beta}) = 0$$

כי נגזרת הקווריאנטית של $g_{\alpha\beta}$ אפס. בדרך דומה, אם יש עוד וקטור U^α ב x_0^μ אורתוגונלי ל V^α, ונבנה ה $\tilde{U}^\alpha$ בדרך של (3) נמצא ש

$$\frac{d}{d\sigma}(\tilde{U}^\alpha\tilde{V}^\beta g_{\alpha\beta}) = 0 \tag{5}$$

כך ש $\tilde{U}^\alpha$ ו $\tilde{V}^\alpha$ נשארים אורתוגונלים כל הדרך.

מכל התכונות האלה אפשר להסיק ש $\tilde{V}^\alpha$ הוא הווקטור V^α מובל לאורך העקומה מקביל לעצמו. ההכללה לווקטור קווריאנטי היא

$$\frac{d\tilde{V}_\alpha}{d\sigma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\tilde{V}_\gamma\frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0 \tag{6}$$

נמצאנו למעין: אפשר להעביר וקטור לאורך עקומה כאשר הוא נשאר מקביל לעצמו. הנושא נקרא הובלה במקביל (parallel transport).

אם נסתכל על משוואה הגאודסית לחלקיק חפשי (עיין (6.6)) נראה שאפשר לאפיין תנועה חפשית של חלקיק כהובלת מהירותו מקביל לעצמה. עוד דוגמה בעניין הובלה מקבילה: לפי סעיף (ט.1) הספין של חלקיק חפשי, Σ^α, נשמר בתנועתו. ביחסות כללית

עקרון הצמדה המינימלית מכתיב המעבר ממרחב מינקובסקי לרימני לפי

$$(7)\quad \frac{d}{d\tau}S^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\tau} S^\alpha_{,\mu} = 0 \Rightarrow \frac{dx^\mu}{d\tau} S^\alpha_{;\mu}$$

כך שיוצא שספין של חלקיק חופשי מובל מקבילית לעצמו לאורך מסלול החלקיק.

יש לציין ההבדל בין $\tilde V^\alpha$ והווקטור V^α עצמו אם הנו מהווה שדה. נוסף, עבור שדה V^α קונסיסטנטי כך רק אם הובלה מקבילית לאורך שתי עקומות שרירותיות בין שתי נקודות נותן אותו וקטור. או במילים אחרות, אפשר לבנות שדה וקטורי בעזרת הובלה במקבילית רק אם הובלה במסלול סגור מחזירה את הווקטור המקורי. 30

ב. הובלה מקבילית במסלול סגור

ראשית כל נחקור מה שקורה עבור עקומה שנסגרת על עצמה באזור קטן. לצורך אינטגרציית המשוואה (3) נעשה פיתוח

$$(8)\quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\mu) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x_0^\mu) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\rho}(x_0^\mu)(x^\rho - x_0^\rho)+\dots$$

לסדר נמוך יותר (3) נותן

$$(9)\quad \tilde V^\alpha(x^\mu) = \tilde V^\alpha(x_0^\mu) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x_0^\mu)\,\tilde V^\beta(x_0^\mu)\,(x^\gamma - x_0^\gamma)+\dots$$

$$(10)\quad \int_0^\sigma d\sigma\, \frac{d\xi^\gamma}{d\sigma} = x^\gamma - x_0^\gamma \qquad \text{כי}$$

אם נציב גם (8) וגם (9) ב (3) נקבל

$$(11)\quad \frac{d\tilde V^\alpha}{d\sigma} = -\left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\rho}(x^\rho-x_0^\rho)\right)\left(\tilde V^\beta - \Gamma^\beta_{\delta\epsilon}\tilde V^\delta(x^\epsilon - x_0^\epsilon)\right)\frac{d\xi^\gamma}{d\sigma}$$

כאשר לא ציינו כבר הארגומנט x_0^μ בכל כמות באגף ימין. אינטגרציה נותנת

$$(12)\quad \tilde V^\alpha(\xi^\mu(\sigma)) = V^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}V^\beta\int_0^\sigma \frac{d\xi^\gamma}{d\sigma}d\sigma$$
$$- \left(\Gamma^\alpha_{\delta\gamma,\rho} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\delta\rho}\right)V^\delta\int_0^\sigma (x^\rho-x_0^\rho)\frac{d\xi^\gamma}{d\sigma}+\dots$$

כאן כבר כתבנו V^α במקום $\tilde{V}^\alpha(x_0^\mu)$ כזאת אך
האינטגרציה נסגרת על עצמה (מסלול סגור)

$$\oint d\sigma \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} = 0 \qquad (13)$$

והאבר הראשון באגף ξ^β ימין של (12) נעלם. כדי
שבדרך האינטגרל השני נזכור ש ξ^μ בסך הכל
פונקציה של σ שנותנת ה x^μ בו עובר המסלול.
עתה

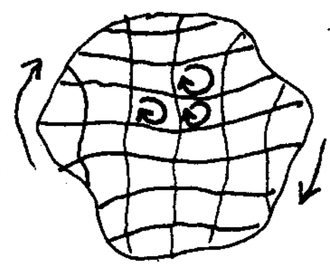
$$\oint (x^\rho - x_0^\rho)\frac{d\xi^\gamma}{d\sigma}d\sigma = \oint x^\rho \frac{dx^\gamma}{d\sigma}d\sigma = -\oint x^\gamma \frac{dx^\rho}{d\sigma}d\sigma \qquad (14)$$

אנו רואים שאינטגרל הזה הינו אנטיסימטרי ב γ,ρ.
לכן אפשר לכתוב (12) כך:

$$\Delta\tilde{V}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\alpha_{\delta\gamma,\rho} - \Gamma^\alpha_{\delta\rho,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\rho}\Gamma^\beta_{\delta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\delta\rho}\right)V^\delta \oint x^\gamma dx^\rho \qquad (15)$$

אף כי קבלנו התוצאה הזו בהנחה שהמסלול משתרע
על אזור קטן בו אפשר לקרב כמו ב (8), התוצאה
נכונה גם לאזור גדול. כי נניח שעושים פרסלציה של
ה"שטח" המוקף ע"י המסלול

(16)



סכום של בטוים כמו (15), אחד לכל תא, שווה
לשנוי של $\tilde{V}^\alpha$ מסביב לגבול כל האזור משום שאינטגרלים
דקווים הפנימיים מצטמצמים בזוגות. נסתכל על אינטגרל
אחד. ניקח קואורדינטות דמויות אליפטיות לאותו אזור קטן
ונקרא להן a,b. אז לפי משפט גרין

$$\oint_{\partial A} x^\gamma dx^\rho = \oint_{\partial A} x^\gamma\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial a}da + \frac{\partial x^\rho}{\partial b}db\right) \qquad (17)$$

$$= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(x^\gamma \frac{\partial x^\rho}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(x^\gamma \frac{\partial x^\rho}{\partial a}\right)\right] da\, db \quad \leftarrow \text{משפט גרין}$$

$$= \int_A \underbrace{\left[\frac{\partial x^\gamma}{\partial a}\frac{\partial x^\rho}{\partial b} - \frac{\partial x^\rho}{\partial a}\frac{\partial x^\gamma}{\partial b}\right]}_{\text{דטרמיננטה של } x^\gamma, x^\rho \text{ ב- } a,b} da\, db$$

לכן האינטגרל הוא אינטגרל על השטח של טנזור $d\Sigma^{\gamma\rho}$.

על כן לגבי האזור הגדול ב-(16) יש לנו

$$(18)\qquad \Delta\tilde{V}^{\alpha} = \frac{1}{2}\int_A R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}\, V^{\delta}\, d\Sigma^{\gamma\rho}$$

כאשר מגדירים

$$(19)\qquad R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\rho,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\beta}_{\delta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\delta\rho}$$

ה-V^{δ} וה-$R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}$ הוכנסו בתוך האינטגרל כי הוא סכום תרומות, אחת מכל אזור קטן ב-(16).

ה-$R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}$ הוא טנזור. כי $\Delta\tilde{V}^{\alpha} = \tilde{V}^{\alpha} - V^{\alpha}$ הוא הפרש שני וקטורים באותה נקודה x_0^{μ}, ולכן הוא וקטור:

$$(20)\qquad d\Sigma^{\gamma\rho} = \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial a}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial b} - \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial b}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial a}\right) da\, db$$

באופן דומה עובר טרנספורמציות של הקואורדינטות הכלליות x^{μ} כמו טנזור. ו-V^{α} הוא וקטור. לכן (18) והוא נכון לשטח קטן שרירותי ולוקטור V^{α} שרירותי, ובכל מערכות הקואורדינטות, רק אם $R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}$ עובר טרנספורמציות כמו טנזור עם האינדקסים המסומנים. רואים מ-(19) ש-$R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}$ אינו מתאפס גם במערכת אינרציאלית מקומית, ולכן הוא קיים בכל (או כמעט כל) מרחב רימני.

ה-$R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}$ נקרא טנזור רימן-כריסטופל או סתם טנזור רימן. לפי (18) רואים שבדרך כלל העתקה מקבילית של וקטור במסלול סגור אינה מחזירה אותו לערכו המקורי, כלומר, העתקה מקבילית בשני מסלולים שונים נותנת תוצאות שונות ולכן אי אפשר להשתמש בה לבניית שדה וקטורי קונסיסטנטי. היוצא מהכלל בקבוצות אלה הוא מרחב מינקובסקי. עבורו אפשר לבחור קואורדינטות כך ש-Γ מתאפסות זהותית. ואז, ורק אז, כל רכיבי R מתאפסים זהותית. כך אפשר להבחין אם מטריקה נתונה מתארת מרחב שטוח. אם טנזור רימן שלה מתאפס על כל רכיביו* המטריקה היא של מרחב מינקובסקי באיזו קואורדינטות. אם אפילו רכיב אחד של R לא מתאפס מדובר במרחב רימני כללי.

נוסיף עתה הכלל המקביל ל-(18) עבור וקטור קווריאנטי:

$$(21)\qquad \Delta\tilde{V}_{\delta} = -\frac{1}{2}\int R^{\alpha}_{\ \delta\gamma\rho}\, V_{\alpha}\, d\Sigma^{\gamma\rho}$$

---

* ובנוסף הסיגנטורה בכל מקום היא $(-+++)$

ג. אי-חילופיות נגזרות קווריאנטיות

במרחב שטוח (גאומטריה אוקלידית או מינקובסקית) שתי נגזרות חלקיות של וקטור חילופיות. לא כך במרחב רימני עם נגזרות קווריאנטיות של וקטור. כי לפי הגדרת נגזרת קווריאנטית

$$(22)\qquad V_{\alpha;\beta;\gamma} = (V_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} V_\delta)_{,\gamma} - (V_{\mu,\beta} - \Gamma^{\delta}_{\mu\beta} V_\delta)\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} - (V_{\alpha,\mu} - \Gamma^{\delta}_{\mu\alpha} V_\delta)\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}$$

נשים לב שהנגזרת השניה $V_{\alpha,\beta,\gamma}$ סימטרית ב $\gamma\beta$; אותו דבר המחובר האחרון. לכן

$$(23)\qquad V_{\alpha;\beta;\gamma} - V_{\alpha;\gamma;\beta} = -(\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta})V_\delta - \cancel{(V_{\mu,\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} - V_{\mu,\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta})} - \cancel{(V_{\delta,\gamma}\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} - V_{\delta,\beta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma})}$$
$$+ (\Gamma^{\delta}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\delta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma})V_\delta$$
$$= -R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}V_\delta$$

כאמור, אין הקומוטטור מתאפס, אבל גם מעניין שהוא תלוי רק ב V_δ עצמו ולא בכלל נגזרת של V_δ.

ההכללה של (23) לוקטור קונטרווריאנטי הוא

$$(24)\qquad V^{\alpha}{}_{;\beta;\gamma} - V^{\alpha}{}_{;\gamma;\beta} = R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma}V^{\delta}$$

רואים שטנזור רימן גם כאן מבטא את השוני המהותי בין מרחב רימני למרחב שטוח.

ביטוי כמו (24) משמש מוכיח כי R הינו טנזור. באגף שמאל יש כאן טנזור אמיתי. V^δ הוא וקטור. אם R לא היה טנזור לא היינו מקבלים התוצאה בכל הקואורדינטות, ובעיקר שלא לכל וקטור V^δ: (31)

ד. סימטריות של טנזור רימן

ישירות מ (19) אפשר לראות ש $R^{\alpha}{}_{\delta\gamma\varepsilon}$ הוא אנטיסימטרי באינדקסים $\gamma\varepsilon$ (האחרונים). תכונה זו קיימת גם ל $R_{\alpha\delta\gamma\varepsilon}$.

נבדוק עתה את $R_{\alpha\delta\gamma\rho}$ במערכת קואורדינטות מקומיות בהן ה-Γ מתאפסות, ונגזרת אחת של g גם.

$$R_{\alpha\delta\gamma\rho} = g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\delta\gamma,\rho} - g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\delta\rho,\gamma}$$

$$\text{(25)}\qquad = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\left[g^{\beta\mu}\left(g_{\mu\delta,\gamma} + g_{\gamma\mu,\delta} - g_{\delta\gamma,\mu}\right)\right]_{,\rho}$$

$$- \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\left[g^{\beta\mu}\left(g_{\mu\delta,\rho} + g_{\rho\mu,\delta} - g_{\delta\rho,\mu}\right)\right]_{,\gamma}$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2} g_{\alpha\delta,\gamma\rho}} + \tfrac{1}{2} g_{\gamma\alpha,\delta\rho} - \tfrac{1}{2} g_{\delta\gamma,\alpha\rho}$$

$$\cancel{-\tfrac{1}{2} g_{\alpha\delta,\rho\gamma}} - \tfrac{1}{2} g_{\rho\alpha,\delta\gamma} + \tfrac{1}{2} g_{\delta\rho,\alpha\gamma}$$

ברור מכאן מיד ש $R_{\alpha\delta\gamma\rho} = -R_{\delta\alpha\gamma\rho}$ כלומר טנזור רימן אנטיסימטרי בשני אינדקסים הראשונים כמו כן רואים ש $R_{\alpha\delta\gamma\rho} = R_{\gamma\rho\alpha\delta}$ כלומר, סימטריה תחת החלפת זוג אינדקסים ראשון ואחרון. עוד תכונת סימטריה היא

$$\text{(26)}\qquad R_{\alpha\delta\gamma\rho} + R_{\alpha\rho\delta\gamma} + R_{\alpha\gamma\rho\delta} = 0$$

(תכונה ציקלית). כל תכונות אלה נכונות במערכת אינרציאלית. לכן הן גם נכונות בכל מערכת קואור-דינטות. למשל אם נציג בקואורדינטות הכלליות

$$R'_{\mu\nu\sigma\tau} + R'_{\mu\tau\nu\sigma} + R'_{\mu\sigma\tau\nu} =$$

$$\text{(27)}\qquad \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\tau}} R_{\alpha\delta\gamma\rho} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} R_{\alpha\rho\delta\gamma}$$

$$+ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\tau}}\frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} R_{\alpha\gamma\rho\delta}$$

הפקטורים של טרנספורמציה זהים בכל המחוברים והמקדמים שלהם מסתכמים באפס עפ"י (26). לכן בכל מערכת קואורדינטות

$$\text{(28)}\qquad R_{\alpha\delta\gamma\rho} + R_{\alpha\rho\delta\gamma} + R_{\alpha\gamma\rho\delta} = 0$$

ובדומה

$$\text{(29)}\qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

הוכחת השורה האחרונה בכל מערכת נשאר לתרגיל.

כעת נראה עקבה של טנזור רימן. יש רק אחת

בגלל הסימטריות (29). הטנזור המתקבל נקרא טנזור Ricci (״ריצ׳י״), ונראה כך:

(30) $$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}$$

מהסימטריה של הזוגות נובע ש

(31) $$R_{\beta\alpha} = R^{\mu}{}_{\beta\mu\alpha} = g^{\mu\nu} R_{\nu\beta\mu\alpha} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\alpha\beta}$$

לכן טנזור ריצ׳י הוא סימטרי. בגלל כל הסימטריות אי-אפשר לבנות עוד טנזורים עם שני אינדקסים מטנזור רימן. למשל:

(32) $$R^{\mu}{}_{\mu\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\mu\alpha\beta} = 0$$

ו-

(33) $$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\mu} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\beta\mu} = g^{\mu\nu} R_{\beta\mu\nu\alpha} = -g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\nu\alpha} = -R^{\nu}{}_{\beta\nu\alpha} = -R_{\beta\alpha}$$

מ-$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ ניתן לבנות שני סקלרים

(34) $$\tilde{R} \equiv \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \;;\quad R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

$\tilde{R}$ מתאפס זהותית כתוצאה מ-(26). לכן סקלר ריצ׳י R הוא הסקלר היחיד שבונים מטנזור רימן.

ה. <u>זהויות Bianchi</u>

הסימטריות בסעיף ד׳ הן זהויות אלגבריות בטנזור רימן. ישנה גם זהות דיפרנציאלית חשובה, זו של ביאנקי. שוב נעבוד במערכת אינרציאלית בה, לפי (25)

(35) $$R_{\alpha\delta\gamma\rho} = \frac{1}{2} g_{\gamma\alpha,\delta\rho} - \frac{1}{2} g_{\delta\gamma,\alpha\rho} + \frac{1}{2} g_{\rho\alpha,\delta\gamma} - \frac{1}{2} g_{\delta\rho,\alpha\gamma}$$

הביטוי בקואורדינטות כלליות יהיה שונה מזה בתוספת ביטויים כמו ΓΓ ויתבטלו ביטויים ∂g ו-$g_{\alpha\beta}$ במכפלות את הביטוי השונה. ניקח את הנגזרת הקווריאנטית של $R_{\alpha\delta\gamma\rho}$ ונעשה לגביה צורה קבלה

(36) $$R_{\alpha\delta\gamma\rho;\mu} + R_{\alpha\delta\mu\gamma;\rho} + R_{\alpha\delta\rho\mu;\gamma}$$

במערכת האינרציאלית הנגזרת הקווריאנטית שקולה לנגזרת רגילה. אם נציב כאן את (35) ונצפה שהביטוי הוא אחד, וכך לא ניתן לסלק תחת ההצבה

הרי שהביטוי (36) הופך ל

$$\tfrac12 g_{\gamma\alpha,\delta\rho\mu} - \tfrac12 \cancel{g_{\delta\gamma,\alpha\rho\mu}} - \tfrac12 \cancel{g_{\rho\alpha,\delta\gamma\mu}} + \tfrac12 \cancel{g_{\delta\rho,\alpha\gamma\mu}}$$
$$+ \tfrac12 \cancel{g_{\mu\alpha,\delta\gamma\rho}} - \tfrac12 \cancel{g_{\delta\mu,\alpha\gamma\rho}} - \tfrac12 \cancel{g_{\gamma\alpha,\delta\mu\rho}} + \tfrac12 \cancel{g_{\delta\gamma,\alpha\mu\rho}} \tag{37}$$
$$+ \tfrac12 \cancel{g_{\rho\alpha,\delta\mu\gamma}} - \tfrac12 \cancel{g_{\delta\rho,\alpha\mu\gamma}} - \tfrac12 \cancel{g_{\mu\alpha,\delta\rho\gamma}} + \tfrac12 \cancel{g_{\delta\mu,\alpha\rho\gamma}} = 0$$

ברור שהתאפסות (36) גם נכונה בכל מערכת
שכן האברים שמבדילים את הביטוי בין מערכת
אינרציאלית למערכת כללית באמת מתאפסים
גם לאחר הגזירה, לכן אומר שהביטוי (37)
הוא טנזורי, ונכון בכל מערכת. לכן כללית

$$R_{\alpha\delta\gamma\rho;\mu} + R_{\alpha\delta\mu\gamma;\rho} + R_{\alpha\delta\rho\mu;\gamma} = 0 \tag{38}$$

שהיא זהות ביאנקי. יש להשוותה עם משוואות
מקסוול (3.17) בשני המקרים מגזרים נגזרות
צוקליות של אובייקט אנטיסימטרי בשני אינדקסים.
אנלוג מלוא של הגזרה $*F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ של אלמה
משוואות מקסוול נמצא ע"י צמצום של (38)

$$g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\delta\gamma\rho;\mu} + g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\delta\mu\gamma;\rho} + g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\delta\rho\mu;\gamma} =$$

$$R_{\delta\rho;\mu} - R_{\delta\mu;\rho} + R^{\alpha}{}_{\delta\rho\mu;\alpha} = 0 \tag{39}$$

כעת אפשר לצמצם הלאה

$$g^{\delta\rho} R_{\delta\rho;\mu} - g^{\delta\rho} R_{\delta\mu;\rho} + g^{\delta\rho} R^{\alpha}{}_{\delta\rho\mu;\alpha} =$$

$$R_{,\mu} - R^{\rho}{}_{\mu;\rho} - R^{\rho\alpha}{}_{\rho\mu;\alpha} =$$
$$-2R^{\rho}{}_{\mu;\rho} + R_{,\mu} = 0 \tag{40}$$

או

$$G^{\rho}{}_{\mu;\rho} = 0 \tag{41}$$

עם ההגדרה

$$G^{\rho}{}_{\mu} \equiv R^{\rho}{}_{\mu} - \tfrac12 g^{\rho}{}_{\mu} R \tag{42}$$

אלה גם נקראות זהות ביאנקי. ה $G^{\rho}{}_{\mu}$ הוא טנזור
אינשטיין. 32

1. משוואות השדה של אינשטיין

בינתיים למדנו איך לתאר השפעות האפקטים של הכבידה על חלקיקים, חומר ושדות אלקטרומגנטיים. הגיע הזמן לברר מה הן המשוואות שקובעות את צורת המטריקה בכל הנסיבות. כלומר איזו משוואות תופסות בתפקיד את מקומה של המשוואה הניוטונית

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \qquad (43)$$

המשוואה הזו בדוקה היטב בסיטואציות בהן השדה הגרביטציוני חלש במקום ואז ϕ/c^2 וחלקיקים או חומר נעים במהירויות $\ll c$. עלינו למצוא משוואה או משוואות שאינן מוגבלות ע"י אותם תנאים.

ראשית כל נעבור למערכת בה המטריקה קרובה למטריקה מינקובסקי. ראינו ב (2.53) שבנסיבות כאלה

$$g_{00} \cong -(1+2\phi) \qquad (44)$$

כאשר ϕ הוא הפוטנציאל הניוטוני הבא מ-(43). לכן לפי (43)

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G\rho = -8\pi G T_{00} \qquad (45)$$

כאשר T_{00} הוא אלמנט טנזור-תנע אנרגיה לכל צורות חומר, קרינה גם וכד'. הכלל $\rho = T_{00}$ בא מ (1.266) למשל.

המשוואה (45) אינה אינווריאנטית לורנץ כי g_{00} אינו סקלר וגם ∇^2 אינו אופרטור סקלרי לורנץ. כדי לשמור את עיקרון הקובריאנטיות גם בנושא הזה נשתדל להחליף (45) במשוואה בין הטנזור המלא $T_{\mu\nu}$ וטנזור הבנוי מהמטריקה ונגזרותיה הראשונות והשניות, ולינארי בשניות $G_{\mu\nu}$. כך שבמקום (45) נקבל

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (46)$$

הדרישה של לינאריות בנגזרות שניות של $g_{\alpha\beta}$ באה מהצורה (45).

כבר פגשנו כמה טנזורים עם התכונה הדרושה, למשל טנזור רימן וצמצומיו טנזור ריצ'י או טנזור אינשטיין. ומתכונות הדרגה רק טנזור ריצ'י וטנזור אינשטיין מתאימים [illegible] באגף הימני של (46). איזה מהם לבחור? [illegible] ב(3.205)

$$T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0 \qquad (47)$$

אז קונסרבטיביות, לאור (47) דורשת שנבחר