מערכת היקום ד׳: קבלה לגבי מערכת עולם.

עד כה הרקע הזה נושא את עקרון השקילות מחדש בצורה כוללת.

עקרון השקילות החלש: "בכל מאורע במרחב-זמן שיש בו שדה כבידה ניתן לבחור מערכת יחוס קטנה כך שבה חוקי התנועה של חלקיק חפשי יש להם הצורה של החוקים במסגרת הפרטית."

התמיכה הנסיונית בעקרון הזה היא מהנסויים של Eötvös וחבריו, Dicke וחבריו, Braginski וחב׳. בנסויים האלה בודקים עד כמה גופים מחומרים שונים נופלים "באותה תאוצה" בשדה הכבידה. ויותר מדויק: הם בודקים אם כוחות המשיכה של שדה הכבידה ותאוצת גופים בו: מסה שווה מקבלים אותה תאוצה. כיוון שהתשובות חיוביות לכל הנסויים (10^{-12}) הרי ששונה הפוסטולט על מערכת עולם מקומית הדרושה לפי העקרון.

עקרון השקילות של איינשטיין: "בכל מאורע במרחב הזמן בשדה כבידה ניתן לבחור מערכת מספיק קטנה שבה כל חוקי הפיזיקה, ולא רק חוקי הכבידה, יש להם אותה צורה כמו בתורת היחסות הפרטית."

גם אותם נסויים שבהם דברנו תומכים בצורה הזו. כי, למשל, אלקטרומגנטיות תורמת מרכיב למסה אטומית ומולקולית, שאינו תלוי רק על מסת הפרוטון או האלקטרון. אם חוקי האלקטרומגנטיות היו משתנים ממערכת למערכת היינו מצפים לתנועות שונות של חלקיקים בעלי הרכב שונה לגבי חוקי הפיזיקה. אבל הנסויים מראים שזה לא קורה, ולכן שהאנרגיה האלקטרומגנטית "נופלת" בדיוק כמו כל מסה אחרת. מכאן שחוקי האלקטרומגנטיות הם בעלי אותה צורה בכל מערכת לוקלית למשנה.

עקרון השקילות החזק: "במערכות הלוקליות שבהן כל חוקי הפיזיקה, כולל חוק הכבידה, יש להם אותה צורה." העקרון בצורה זו בא לידי ביטוי שהכבידה היא תורה גאומטרית, אבל התמיכה בו מוגבלת. בכל זאת העובדה שהאנרגיה הכבידתית של גוף שווה למסתו. אין מדידות ממשיות עדיין לגבי העקרון החזק, כי תלוי בכל צורת מסת הגוף. אבל מערכת הכוכבים הכפולה הפולסר הבינרי (Hulse, Taylor) תומך עוד יותר בעקרון החזק.

3 גרביטציה כגאומטריה

מאחר ועקרון השקילות מזכיר את עקרונות הגאומטריה הלא-אוקלידית, גאוס, ואחר כך רימן, המושג מהותי שבקרבת כל נקודה במרחב דו-ממדי ניתן לחשב מרחקים בעזרת משפט פיתגורס שבו תלוי הגאומטריה האוקלידית. אבל גאוס ויותר מכך, הכללות אוקלידיות מתארות כולן הגאומטריה של הקווים

המקבילים. Riemann הכליל הגאומטריה הלא-אוקלידית
להרבה ממדים ויצר הגאומטריה הרימנית.

בגאומטריה הרימנית המרחב הוא יריעה N-ממדית.
קובעים לה מערכת קואורדינטות

$$\{x^0, x^1, x^2 \dots x^{N-1}\} \tag{13}$$

את המרחק בין שתי נקודות סמוכות מקבלים
מהכללת כלל פיתגורס:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{14}$$

כאן $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ומניחים שלמטריקה יש הפוך $g^{\alpha\beta}$
(עיין (1.9)). כמובן שבכלל $g_{\alpha\beta}$ תלויה במקום, ונוח
לדרוש שיש לה לפחות נגזרת אחת רציפה.
מתמטיקאים חושבים על $g_{\alpha\beta}$ כחיובית ($ds^2 > 0$
בכל מקרה) אבל כיוון שנרצה שמטריקה
לורנץ של מרחב מינקובסקי תהיה מקרה פרטי,
נתיר, בפיזיקה, מטריקה רימנית לא חיובית.
ניתן לשנות קואורדינטות

$$x^\alpha \to x'^\alpha(x^\mu) \tag{15}$$

כך

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\mu dx'^\nu \tag{16}$$

וניתן לראות המטריקה בקואורדינטות החדשות

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \tag{17}$$

זה אנלוגי לטרנספורמציה של טנזור קוברינטי בתוספת
פרטית עם ההצבה

$$(\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu \to \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \tag{18}$$

ולמעשה טרנספורמצית לורנץ היא מהסוג (15) אבל ליניארית.

נקודת הדמיון בין כל זה לעקרון השקילות הוא שבכל
נקודה בגאומטריה רימנית המרחב הוא מקומית
שטוח, או במילים אחרות, מתמטית ניתן לבחור קואורדינטות
חדשות כך שהמטריקה בנקודה היא אוקלידית, וגם
הנגזרות הראשונות שלה מתאפסות. זה נשמע
כמו לומר שבתוך שדה כבידה לא אחיד ניתן לקבוע
בכל מאורע מערכת לורנץ בה המטריקה היא צמודה
והנגזרות הראשונות של המטריקה גם מתאפסות. אלה

תכונות הסרחות של מערכת לורנץ מקומית בה אין מרגישים שדה כבידה את פרטי באנלוגיה נראה בהמשך.

הבעיה הפילוסופית של גישה של אינשטיין צצה הרא שיש להפסיק להתייחס אל הכבידה כאל כח בדומה לאלקטרומגנטיות. כבידה נותן לאכס נקודתית - לכן היא לא כח. יותר נכון לראות אותו כביטוי הגאומטריה הפנימית של מרחב הזמן, כפי שכבר כמו לנו הדרגמנט של שולד.

ה. בחירת יחידות טבעיות: $c=1$

לפני שנמשיך נציין שהעובדה שמוחשות פרטיות הערכה הזמן מתערבבות אומרת שהכי טבעי שיהיו להם אותן יחידות. זכו מקרה היסטורי שמודדים זמן ומרחב בצורה שונה. היחידות הטבעיות צריכות להיות מותאמות לשניהם, למשל שניות ושניות אור שנים ושנות אור, וכו'. במובן היחידות טבעיות אין מהירות האור היא היחידה. בהמשך, נשמיט c מכל הנוסחאות מעתה והלאה.

1. כיצד מוצאים מערכת לורנץ מקומית?

מערכה נעבוד ב 4 ממדים של מרחב הזמן. הקואורדינטות הן

$$\{x^0, x^1, x^2, x^3\} \tag{19}$$

ולאלמנט האורך והוא (14). רצוי למצוא מערכת לורנץ במאורע X^α. נציין הקואורדינטות במערכת מקומית צו ב ξ^a וכן כדי להבדילם מ x^α. כיוון שמערכת לורנץ קטנה נעשה פתוח טיילור של $\xi^a(x^\mu)$ סביב הנקודה X^α. נספים שאותה נקודה היא $\xi^a=0$ במערכת לורנץ, אז (17)

$$\xi^a = \lambda^a{}_\alpha (x^\alpha - X^\alpha) + \frac{1}{2} D^a_{\alpha\beta} (x^\alpha - X^\alpha)(x^\beta - X^\beta) + \ldots \tag{20}$$

כאן $\lambda^a{}_\alpha$ הוא מטריצה של 16 כמויות אנלוגיות ל Λ של טרנספורמצות לורנץ, רק שכאן הטרנספורמציה היא בין מערכת קואורדינטות כלליות למערכת לורנץ. וה $D^a_{\alpha\beta}$ הוא אוסף של 64 קבועים, סימטרית ב $\alpha\beta$.

השאלה איך לבחור $\lambda^a{}_\alpha$ ו $D^a_{\alpha\beta}$ כך שהמטריקה בקואורדינטות ξ^a תהיה η_{ab}? בדומה ל (17)

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^b}{\partial x^\beta} \eta_{ab} \tag{21}$$

נגזור מ (20) וניקח $x^\alpha \to X^\alpha$ לקבל

$$g_{\alpha\beta}\Big|_{x=X} = \eta_{ab}\,\lambda^a{}_\alpha\,\lambda^b{}_\beta \tag{22}$$

זאת משוואה עבור $\lambda^a{}_\alpha$. כיוון שב-$g_{\alpha\beta}$ יש 16 מספרים
(חלק כפולים) וב-$\lambda^a{}_\alpha$ אותו מספר, אפשר תמיד
למצוא פתרון. אבל רק זה, יש חופש בבחירת
ה-λ כי $g_{\alpha\beta}$ הוא סימטרי. החופש מובן; אם
מצאנו מערכת לורנץ מקומית, אפשר
לקבל אחרת ע"י הפעלת טרנספורמציות לורנץ Λ
ולכן יש משפחה שלמה של $\lambda^a{}_\alpha$ מתאימות.

שנית נגזור (21) אבל נזכור שנגזרות של המטריקה
לפי ξ^a אמורות להתאפס, ולכן מתייחסים אל η_{ab} כאל
קבוע. אחרי לקיחת הגבול $X^\alpha \to x^\alpha$ נקבל

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\Big|_{x=X} = \eta_{ab}\left(\frac{\partial^2\xi^a}{\partial X^\gamma\partial X^\alpha}\frac{\partial\xi^b}{\partial X^\beta} + \frac{\partial^2\xi^b}{\partial X^\gamma\partial X^\beta}\frac{\partial\xi^a}{\partial X^\alpha}\right)_{x\to X} \tag{23}$$

$$= \eta_{ab}\left(D^a_{\gamma\alpha}\,\lambda^b{}_\beta + D^b_{\gamma\beta}\,\lambda^a{}_\alpha\right)$$

נעבור למשתנים $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ המוגדרים לפי

$$D^a_{\alpha\beta} = \lambda^a{}_\mu\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \tag{24}$$

מספר ה-$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ כמספר ה-$D^a_{\alpha\beta}$. יש לציין שאין טענה
שאלה או אלה טנזורים. במונחים של ה-Γ

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\big|_{x=X} = \eta_{ab}\left(\lambda^a{}_\mu\,\lambda^b{}_\beta\,\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + \lambda^b{}_\mu\,\lambda^a{}_\alpha\,\Gamma^\mu_{\gamma\beta}\right) \tag{25}$$

$$= g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + g_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}$$

כעת נשמיט את הציון $|_{x=X}$ ונחבר 3 משוואות מהטפוס
(25):

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} = g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} + \cancel{g_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta}} \tag{26}$$

$$+ g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} + \cancel{g_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}} - \cancel{g_{\mu\gamma}\Gamma^\mu_{\beta\alpha}} - \cancel{g_{\mu\alpha}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}$$

$$= 2\,g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

נכפיל מה שקיבלנו עם $g^{\delta\beta}$ ונשתמש באופיו ההפוך

ההפוך של $g^{\delta\beta}$ כדי לקבל

$$\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} g^{\delta\beta}\left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta}\right) \equiv \left\{ {\delta \atop \alpha\gamma} \right\} \qquad (27)$$

ה $\left\{ {\delta \atop \alpha\gamma} \right\}$ הוא קיצור לאותו הסמל כאן ונקרא סימן Christoffel. מה שחשוב הוא מתאים לקביעת ה $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ הדרושה לגמרי ב $D^{a}_{\alpha\beta}$ לפי (24) שדרושות כדי להגדיר את הקואורדינטות באופן גלובליות ξ לפי (20).

קביעת ה $\lambda^a{}_\alpha$ נעשית בדרך הבאה. אם נצמצם $dx^\alpha dx^\beta$ לפי (22) נקבל

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = \eta_{ab}\left(\lambda^a{}_\alpha dx^\alpha\right)\left(\lambda^b{}_\beta dx^\beta\right) \qquad (28)$$

הרעיון אם כן, לזהות בצורה דיפרנציאלית $\lambda^a{}_\alpha dx^\alpha$ כאלה שהסכום לפי סימני המטריקה של לורנץ נותן ds^2. כדוגמה ניקח

$$ds^2 = -A\,dt^2 + B\,dt\,dx + C\,dx^2 + D\,dy^2 + E\,dz^2 \qquad (29)$$

צריך להשלים הריבוע

$$ds^2 = -\left(A^{1/2}dt - \frac{B}{2A^{1/2}}dx\right)^2 + \left(C + \frac{B^2}{4A}\right)dx^2 + D\,dy^2 + E\,dz^2 \qquad (30)$$

מהשוואה עם (28) רואים שצריך

$$\begin{aligned}
&\lambda^0{}_0 = A^{1/2}, \quad \lambda^0{}_1 = -\frac{B}{2A^{1/2}}, \quad \lambda^0{}_2 = \lambda^0{}_3 = 0 \\
&\lambda^1{}_0 = \lambda^1{}_2 = \lambda^1{}_3 = 0 \qquad \lambda^1{}_1 = \left(C + \frac{B^2}{4A}\right)^{1/2} \\
&\lambda^2{}_2 = D^{1/2} \qquad \lambda^2{}_0 = \lambda^2{}_1 = \lambda^2{}_3 = 0 \\
&\lambda^3{}_3 = E^{1/2} \qquad \lambda^3{}_0 = \lambda^3{}_1 = \lambda^3{}_2 = 0
\end{aligned} \qquad (31)$$

לכן, בפרקטיקה תמיד אפשר למצוא ה $\lambda^a{}_\alpha$. ה $\lambda^a{}_\alpha$ האלה אינם הפתרון היחיד של (22). למשל נגדיר

$$\bar{\lambda}^a{}_\alpha \equiv \Lambda^a{}_b \lambda^b{}_\alpha \qquad (32)$$

כאשר Λ היא מטריצת בוסט או סיבוב ב 3 ממדים לפי הצבעות (הוכחה בתרגיל 9)

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \eta_{cd} \tag{33}$$

ראינו ש

$$\eta_{ab}\bar{\lambda}^a{}_\alpha\bar{\lambda}^b{}_\beta = g_{\alpha\beta} \tag{34}$$

כלומר ה-λ^a_α גם כשרות להגדרת מערכת לורנץ מקומית. כיוון שב-Λ יש 6 דרגות חופש (3 בוסטים, 3 סיבובים) הרבועות λ^a_α הפותרות תנאי (22) מהוות משפחה 6-פרמטרית.

המשמעות הפיזיקלית של הדבר זה הוא שכאשר נתונה מערכת לורנץ מקומית אחת אפשר לעבור ממנה למשפחה שלמה של מערכות לורנץ אחרות ע"י בוסטים וסיבובים ולכן יש מבחר גדול של λ^a_α. ה-λ^a_α שקיבלנו ב-(31) הוא פשוט הטבעית ביותר למטריקה (29) וכיון שאם ע"י טרנספורמציות קואורדינטות גלובליות נשנה המטריקה $g_{\alpha\beta}$ (כמו ב-(16)), הרי שה-λ^a_α תהיה אחרת.

(18) ← יש להבין $_\mu\lambda^0$ כ-4-מהירות המערכת לורנץ המקומית. זה משום שלפי (20) ו-(24) בדומה רכיבים אלה קובעים את קצב גדול ה"זמן" ξ^0 במערכת האינרציאלית כתוצאה מתזוזה לפי הקואורדינטות הגלובליות x^μ. בדומה לכך $_\mu\lambda^1$ משמשת כווקטור לאורך ציר "1" של מערכת לורנץ, וכו'.

$$V_\alpha \equiv \lambda^0{}_\alpha \qquad i_\alpha \equiv \lambda^1{}_\alpha \qquad j_\alpha \equiv \lambda^2{}_\alpha \qquad k_\alpha \equiv \lambda^3{}_\alpha \tag{35}$$

תמונה בזהו זה, ובמיוחד הקביעה שה-λ^a_α מנורמלים נקבל מה שאמרנו (22) בצורה

$$g_{\alpha\beta} = -\lambda^0_\alpha\lambda^0_\beta + \lambda^1_\alpha\lambda^1_\beta + \lambda^2_\alpha\lambda^2_\alpha + \lambda^3_\alpha\lambda^3_\alpha \tag{36}$$

ובצורה הבנויה במרחב שטוח (כאן $a,b=1,2,3$)

$$\delta_{ab} = i_a i_b + j_a j_b + k_a k_b \tag{37}$$

כאשר i, j, k כאן הם 3 וקטורי יחידה ניצבים זה לזה (לאו בהכרח לאורך צירי xyz).

לרביעיה כמו (35) קוראים tetrad או vierbein או orthonormal frame, ונמצא להן שימוש גדול בתורה. יש לשים לב שטטרדה תלויה במרחב מינקובסקי למחצה ובמרחב זמן רימן למחצה.

5. <u>תנועת חלקיק חופשי והגבול הניוטוני</u>

במערכת לורנץ אמור חלקיק חופשי לנוע לפי

$$\frac{d^2\xi^a}{d\sigma^2}=0 \tag{38}$$

כיון σ הוא זמן עצמו עבור חלקיק עם מסה ופרמטר אחר עבור פוטון, את (38) נשכתב

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\right)=\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma}+\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0 \tag{39}$$

אבל מ (20) ו- (24) נובע ש

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\alpha}=\lambda^a_\alpha+\cdots \qquad \frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^\nu\partial x^\mu}=\lambda^a_\alpha\Gamma^\alpha_{\nu\mu}+\cdots \tag{40}$$

ולכן

$$\lambda^a_\alpha\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma^\alpha_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)=0 \tag{41}$$

אבל ניתן לבחור הטטרדה בהרבה דרכים. לכן משוואה זו אומרת שבמערכת קואורדינטות כלליות החלקיק נע לפי

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma^\alpha_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0 \tag{42}$$

שלא כמשוואת התנועה (38), המשוואה (42) מצביעה על תנועה לא אינרציאלית במערכת קואורדינטות גליליות. זה לא מפתיע. אם נתאר תנועה של חלקיק, אפילו בתורה הניוטונית, אבל במערכת קואורדינטות כדוריות, התוספות לתאוצה $\vec{a}$ אומרת, רדין הנתון, ש

$$\frac{d^2r}{dt^2}=r\dot\theta^2+r\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 \tag{43}$$

(אלה גורמי הכח הצנטריפוגלי v^2/r). עכשיו נראה איך (43) נובע מ (42) בקואורדינטות כדוריות.

$$ds^2=-dt^2+dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{44}$$

לכן

$$g_{00}=-1,\quad g_{11}=1,\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta \tag{45}$$

ומ-(27) נובע ש (כאן $g^{\alpha\alpha}=1/g_{\alpha\alpha}$)

$$\Gamma^1_{\mu\nu}=\tfrac12\cdot1\cdot\left(g_{1\mu,\nu}+g_{1\nu,\mu}-g_{\mu\nu,1}\right) \tag{46}$$

ובפרט

(47) $$\Gamma^1_{11} = 0 \quad \Gamma^1_{22} = -r \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta$$

והאחרות מתאפסות. לכן (42) עם הבחירה $\sigma = t$ $\alpha = 1$ מתלכדת עם (43). המסקנה הזו שיש ב (42) כדי לתאר תנועה אינרציאלית במערכת קואורדינטות כלשהי.

אבל בגאומטריה רימנית כללית אין אפשרות של בחירת קואורדינטות גלובליות כך שכל ה Γ תתאפסנה (כמו שיש במרחב אוקלידי עם מטריקה כמו (44) שאפשר להעביר בה למטריקה אוקלידית δ_{ij}). לכן במרחב רימני כללי חלקיק חופשי נע לפי (42) ובד"כ עם תאוצה. זה מתאים לרעיון שגאומטריה רימנית יכולה לתאר של מרחב זמן ויש שדה כבידה. אפוס הכבידה ניתן להשיג בנקודה אך לא גלובלית.

כדי לבדוק אם אכן גאומטריה רימנית יכולה לתאר השפעות הניוטוניות של הכבידה, נתמקד במרחב-זמן רימני שהוא מאד קרוב למרחב מינקובסקי, כלומר, שניתן לבחור מטריקה

(48) $$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}; \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

ברור ש

(49) $$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + O(h)$$

ולכן

(50) $$\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\beta\nu,\mu} + h_{\beta\mu,\nu} - h_{\nu\mu,\beta}\right) + O(h^2)$$

ובפרט

(51) $$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(h_{j0,0} + h_{0j,0} - h_{00,j}\right) = -\frac{1}{2}h_{00,i}$$

ההגבלה האחרונה בהנחה של מטריקה סטטית. עם בחירת $\sigma = t$ המשוואה (42) נותנת, בהזנחת האיברים ($v\Gamma$ ו- $v^2\Gamma$)

(52) $$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00}$$

זו נראית כ $\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi$ וזה בתנאי שנזהה ϕ עם $-h_{00}/2$ אז במונחי המטריקה

(53) $$g_{00} = -1 - 2\phi$$

(אם מחזירים c הביטוי הוא $(g_{00} = -c^2(1+2\phi/c^2))$)

המסקנה: התנועה הגאודטית של חלקיק חפשי לפי משוואה (42) בגאומטריה רימנית מתלכדת עם התנועה הניוטונית בפוטנציאל ϕ המוגדר לפי (53). אין רכיבים אחרים של סטיית המטריקה ממינקובסקיות, h_{0i} או h_{ij}, משפיעים על תנועה זו. אנו מגיעים רק בגבול שבו דר ניוטוני כבנדה לתנות להתאים בגאומטריה מרחב הזמן כל עוד מדובר רק על חלקיקים בעלי מסה איטיים.

ח. דילטציית זמן והסחה לאדום הגרביטציונית

נתבונן בכמות

$$K = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} \tag{54}$$

לפי (42)

$$\frac{dK}{d\sigma} = g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + 2g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} \tag{55}$$

$$= \left(g_{\mu\nu,\alpha} - 2g_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\right)\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

הסוגריים מתאפסים אחרי (25) ולכן K נמצא קבוע תנועה.
כעת לפי הצבות בנקודה X מסוימת

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{56}$$

ברור שלחלקיק בעל מסה ניתן להגדיר זמן עצמי כך:

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \tag{57}$$

(ראה ((1.76)). השוואה עם (54) מראה ש τ פרופורציוני ל σ. זאת אומרת, עבור חלקיק בעל מסה אפשר לכתוב משוואת התנועה כך:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{58}$$

מהו הקשר בין זמן עצמי τ לזמן העולמי $t = x^0$?
מ (57)

$$d\tau^2 = -g_{00}\,dt^2 - g_{0i}\,dt\,dx^i - g_{ij}\,dx^i dx^j \tag{59}$$

אם אין המטריקה תלויה בזמן

$$\tau = \left(-g_{00} - g_{0i} v^i - g_{ij} v^i v^j\right)^{1/2} t \qquad (60)$$

ואחרת יש לעשות אינטגרל. בכל מקרה כאשר שעון הוא במנוחה ב x^i

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\; dt \qquad (61)$$

תוצאה זו מראה שקצב שעון שונה לפי מקומו בשדה הגרביטציוני. למשל בקרוב הניוטוני בו (53) מספיק מדויק

$$d\tau \cong (1+\phi)\, dt \qquad (62)$$

זה אומר שהשעון $\mathcal{D}$ יותר לאט ככל שהוא יותר עמוק בפוטנציאל.

אם השעון בתנועה בשדה גרביטציוני כלשהו נצטרך ל (59). אם הגאומטריה קרובה למינקובסקית במובן (48), אז רק הביטוי (53)

$$d\tau = \left(1 + 2\phi - 2h_{0i} v^i - \vec{v}^2 - h_{ij} v^i v^j\right)^{1/2} dt \qquad (63)$$

$$\cong \left(1 + \phi - \tfrac{1}{2}\vec{v}^2\right) dt + O(hv)$$

יש כאן סכום של דילטציה בזמן ודילטציה גרביטציונית. התלות של $\vec{g}$ אבל ϕ מופיע מתמטית ועוד שתלויה אשר משפיע הן נשנות על קצב השעונים. הנוסחה (63) חשובה בטכנולוגיות החלל ונבדקה שם היטב.

לפוטון אנו יודעים ש

$$\eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0 \qquad (64)$$

ולכן לכל פוטון נוסע על מסלול המקיים

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0 \qquad (65)$$

מ (52) אנו רואים ש $K=0$ לפוטון שקונסטנטות רק שמורות של K. אבל כל זה אומר שאין זמן עצמי לפוטון, וצריך להשתמש בפרמטר σ. כלומר נותר σ לבטל הפרמטר האפיני, כמובן שהמשוואה (42) תקפה אז.

כעת אנו יכולים לפרש את ארגומנט שלנו מסעיף 2 ובמקביל עם זה לקבל מהפורמליזם את נוסחת ההסחה לאדום המדויקת. ניקח סיטואציה שאפשר לתאר

אותה עם מגע של תלוה בקואורדינטה $t=x^0$. זאת אומרת מצב סטציונרי של השדה הגרביטציוני. במקום "1" בשדה גלים אלקטרומגנטיים או כל גלים אחרים משודרים. למשדר יש תדירות f_1 שפירושה הדבר, הזמן בין שיאי גלים הוא

$$\Delta\tau\Big|_1 = 1/f_1 \qquad (67)$$

לפי שעון המשדר. לפי (61) הזמן העולמי בין שיאים הוא

$$\Delta t = \frac{1}{f_1\sqrt{-g_{00}(1)}} \qquad (68)$$

בגלל סטציונריות המטריקה, פרק הזמן Δt נשמר - זהו ענין גאומטרי בלבד - כפי שאפשר לראות מהתמונה בציור 15. במקום "2" נקלט הגל בגלאי שהשעון שלו מודד זמן עצמי המתאים לאותו מקום. הוא ימצא תדירות f_2 שקשורה עם $\Delta\tau$ לפי

$$\Delta\tau\Big|_2 = 1/f_2 \qquad (69)$$

שוב יש קשר מעין (68) למקום "2", ולכן כיוון ש Δt הוא אותו פרק זמן ל"1" ו"2", אז

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{-g_{00}(1)}}{\sqrt{-g_{00}(2)}} \qquad (70)$$

נוסחה זו מדויקת למשדר ומקלט במטריקה סטציונרית.
בשדה גרביטציוני חלש (גאומטריה קרובה למינקובסקית) לוקחים הצורה (53) ואז

$$\frac{f_2}{f_1} = \left(\frac{1+2\phi(1)}{1+2\phi(2)}\right)^{1/2} \cong 1+\phi(1)-\phi(2) \qquad (71)$$

אבל אנו יודעים ש $|\phi|\ll 1$ (או $|\phi|\ll c^2$ כאשר מחזירים c) ולכן אם נכתוב $f_1\to f$ $f_2\to f+\Delta f$ $\phi(2)-\phi(1)\to\Delta\phi$, אז

$$\frac{\Delta f}{f} = -\Delta\phi \qquad (72)$$

נוסחה זו זהה לנוסחה המקורית (3) שאינשטיין התחיל אתה. (70) מהווה הכללה לשדה חזק.

נעריך עכשיו את ההסטה הגרביטציונית בין פני כדור

לגובה רב

(73)
$$\frac{\Delta\phi}{c^2} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus c^2} = \frac{6.678\times10^{-8}\times 6\times10^{27}}{6.4\times10^{8}\times 9\times10^{20}} = 7\times10^{-10}$$

בין פני השמש לנקודה רחוקה

(74)
$$\frac{\Delta\phi}{c^2} = \frac{6.678\times10^{-8}\times 2\times10^{33}}{7\times10^{10}\times 9\times10^{20}} = 2\times10^{-6}$$

באספקט הניסיוני נבדק ע"י השוואת שעונים מלוויינים (GPS) והשני ממדידות בספקטרום השמש ע"י Brault. נוסף לכך יש גם מסך קצת מזל למסת השמש אבל הגודל קטן בפקטור אלף, ולכן פקטור ההסחה מתחיל להיות כצנוע!

העובדה שאותו פוטנציאל ϕ מופיע בהסחה לאדום (72) ובמשוואת חלקיק (52) הוא כמובן ביטוי של עקרון השקילות, כלומר ברגע שאנו במערכת בה קיים השדה הגרביטציוני המשפיע על מכונות החלקיקים, קיים גם בשדה הנותן ההסחה לאדום. הכל מובן לסדר ראשון.

20

ט. הסיגנטורה של המטריקה

במטריקות פרטיות יש 4 ממדים, אחד דמוי זמן, ואחרים בלבד. אומרים שהסיגנטורה של המטריקה הוא (+++-) (כמו לאמר שאורכסון טעף הוא 1, 1, 1, -1). לכל מטריקה רימנית שרלבנטית לתאור שדה גרביטציוני חייבות להתקיים (22) בכל נקודה במרחב זמן. מסתבר שזה מגביל הצורות המותרות של $g_{\alpha\beta}$

אם נגדיר מטריצה (λ) שרכיביה הם $\lambda^a{}_\alpha$ (מספל הצורות) הרי ש (22) פרושה

(75)
$$(g) = (\tilde{\lambda})(\eta)(\lambda)$$

כאשר (g) ו (η) הן מטריצות הרכיבים של המטריקות, הטרנס-פורמציה (75) הוא טרנספורמציות סימולריות. משפט Sylvester מבטיח שמספר הערכים העצמיים של (g) ושל (η) שהם חיוביים (שליליים) יהיה זהה. לכן מטריקה $g_{\alpha\beta}$ כשרה לתאור שדה גרביטציוני רק אם יש לה ערך עצמי שלילי בודד בכל מקום וזמן. דוגמא של המטריקה המתבקשת מ-

(76)
$$ds^2 = x^2dt^2 + y^2dx^2 + dy^2 + dz^2$$

בפולה לאינווריאנטיה בו 4 הערכים העצמיים שלה חיוביים.

כדי לברר הסטטוס של המטריקה ב (29) נצטרך ללכסן החלק במרחב tx

$$(77) \qquad \begin{pmatrix} -A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

כלומר פותרים

$$(78) \qquad \begin{vmatrix} -A-z & B/2 \\ B/2 & C-z \end{vmatrix} = 0$$

או

$$(79) \qquad z^2 + (A-C)z - (AC + B^2/4) = 0$$

ידוע ש $-(AC+B^2/4)$ הוא מכפלת השורשים. אנו מחפשים בשורש אחד חיובי ואחד שלילי ולכן חייבים לדרוש ש

$$(80) \qquad (AC + B^2/4) > 0$$

כתנאי מצמדת המטריקה, ובתנאי ש $C>0$, $D>0$, $E>0$.

אין בקיום סיגנטורה נכונה כדי להבטיח שהרכיב g_{00} יהיה שלילי כדרוש ע"י נוסחה כגון (61). כפי שיתברר מאוחר יותר בקורס, ליד חור שחור מסתובב הסיגנטורה נכונה, אך g_{00} חיובי.

ו. עקרון הווריאציה לחלקיק חופשי

נשאל שאלה: אם נתונים 2 מאורעות x^μ_A ו- x^μ_B שבוניהם ישנן עקומות דמויות זמן בכל נקודה, כלומר, ש-

$$(81) \qquad \eta_{ab}\, d\xi^a d\xi^b = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta < 0$$

לנקודת סמוכה, איזו היא העקומה עם זמן עצמי τ_{AB} אקסטרמלי?

אנו מחפשים פתרון ל

$$(82) \qquad \delta \tau_{AB} = \delta \int_A^B \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)^{1/2} d\sigma = 0$$

כי אנו שמים לב ששנוי $\sigma \to f(\sigma)$ לא משנה האינטגרל: σ סתם פרמטר עזר.

$$(83) \qquad \delta \tau_{AB} = -\frac{1}{2} \int^B d\sigma (\;)^{-1/2} \left[g_{\mu\nu,\gamma}\, \delta x^\gamma \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + 2 g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \right]$$

אבל $(\ )^{-1/2} = 1/\frac{d\tau}{d\sigma}$ ולכן יש לנו

$$\int_A^B \left[g_{\mu\nu,\gamma}\, \delta x^\gamma \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 2 g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\,\delta x^\mu}{d\tau} \right] d\tau = 0 \tag{84}$$

כעת נאינטגרל את $d\,\delta x^\mu$ לפי חלקים ונזרוק את איברי הגבול שכן מאורעות A ו- B קבועות:

$$0 = \int_A^B \left[g_{\mu\nu,\gamma} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - 2 g_{\gamma\nu,\delta}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau} - 2 g_{\gamma\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} \right] \delta x^\gamma\, d\tau \tag{85}$$

נקבל עפ"י (75)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\gamma} &\rightarrow g_{\mu\delta}\Gamma^\delta_{\nu\gamma} + g_{\nu\delta}\Gamma^\delta_{\mu\gamma} \\ g_{\gamma\nu,\delta} &\rightarrow g_{\nu\mu}\Gamma^\mu_{\gamma\delta} + g_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\nu\delta} \end{aligned} \tag{86}$$

ונקבל

$$\begin{aligned} & g_{\mu\nu,\gamma}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\sigma} - 2 g_{\gamma\nu,\delta}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau} \\ &= \cancel{g_{\mu\delta}\Gamma^\delta_{\nu\gamma}}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \cancel{g_{\nu\delta}\Gamma^\delta_{\mu\gamma}}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &\quad \cancel{- 2 g_{\nu\mu}\Gamma^\mu_{\gamma\delta}}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau} - 2 g_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\nu\delta}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau} \end{aligned} \tag{87}$$

ועל כן

$$\int_A^B \left[\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \right] g_{\nu\gamma}\, \delta x^\gamma \tag{88}$$

מאחר שוריאציות ה δx^γ לרכיבו, הוקטור המספול אנו חייב שיתאפס בנקודות לאורך העקומה, אזי הרכיבים הקוברינטים כי גם האנטיקוברינטיים ונקבל שמתקבל התנאי

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \tag{89}$$

זאת זהה עם משוואת התנועה לחלקיק חפשי (58).

ומכאן שחלקיק חפשי נע בקירוב על הקו העולמי שעושה את זמנו העצמי של התנועה אקסטרמלי. משום כך נקראת (89) המשוואה הגאודסית, ופתרונה "גאודסות".

האם יש קשר בין עקרון הוריאציה (82) לבין עקרון הלגרנג'יאני או עקרון הפעולה המינימלית במכניקה? נשתמש בקירוב (63) לכתוב (82) כך

$$\delta \tau_{AB} = \delta \int_A^B \left(1 + \phi - \tfrac{1}{2} \vec{v}^{\,2}\right) dt + \cdots = 0 \tag{90}$$

שלמת זה, עקרון הפעולה המינימלית גורס ש

$$\delta \int_A^B L\, dt = \delta \int_A^B m\left(\tfrac{1}{2} v^2 - \phi\right) dt = 0 \tag{91}$$

כיוון שתוספת קבוע ללגרנג'יאן לא משנה, הרי ש (91) ו-(90) אומרים אותו דבר. עקרון הוריאציה (82) הינו עקרון הפעולה המינימלית. לכן, להכליל זה מקובל לכתוב (כיוון אנו מחזירים c):

$$\delta \left(- \int_A^B m \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma \right) = 0 \tag{92} \qquad \leftarrow 21$$

וא. גאודסיות דמויות מרחב ודמויות אור

כעת נעבור על 2 מאורעות x_A^μ ו- x_B^μ שביניהם ישנן עקומות דמויות מרחב בלבד, כלומר

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu > 0 \tag{93}$$

בכל נקודה. העקומה עם אורך אקסטרמלי מתקבלת מעקרון הוריאציה

$$\delta S = \delta \int_A^B \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right)^{1/2} d\sigma = 0 \tag{94}$$

הגזירה מתנהלת כמו בסעיף ו, רק שבמקום τ משתמשים ב s לפי

$$ds = \left(g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \right)^{1/2} \tag{95}$$

ואז מגיעים למשוואה

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0 \qquad (96)$$

שהינו המשוואה הגאודטית. לכן קוו עולמי דמוי מרחב אקסטרמלי באורכו הוא קוו גאודטי. גאודטיות דמויות מרחב משמשות לקביעת המרחק בין מאורעות הלכך קשורים סימולטנית - כפי שלמדנו לא פעם ואין חלקיק מסוגל לקשר בין מאורעות כאלה.

קוו עולמי דמוי אור בכל מקום הוא גם גאודטי בתנאים נרחבים. לקוו כזה ה-L ב-(54) אפס בהגדרות, ולכן מ-(55) נקבל ש

$$\left(g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}+2g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}\right)\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0 \qquad (97)$$

כאן נציב מ-(25)

$$\left[\left(g_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu}+g_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}\right)\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}+2g_{\nu\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\sigma}\right]\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0 \qquad (98)$$

בגלל סימטריות $\Gamma^\beta_{\alpha\mu}$ שני אברים מתחברים לאחד כך ש

$$g_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)\frac{dx^\nu}{d\sigma}=0 \qquad (99)$$

כעת $dx^\nu/d\sigma$ הינו דמוי אור. כמו בתורת היחסות הפרטית אין הווקטור ב-( ) יכול להיות דמוי זמן. אחרת במערכת בה יש לו רק רכיב זמן ונאפס רכיב הזמן של $dx^\mu/d\sigma$ אבל אז הוא לא דמוי אור. נניח ש-( ) אינו דמוי מרחב בשום נקודה. אז הוא דמוי אור בכל נקודה.

אבל שני ווקטורים דמויי אור אורתוגונליים חייבים להיות מקבילים. כי נקרא להם l^μ ו-n^μ

$$(l^\mu+\tilde f n^\mu)(l_\mu+\tilde f n_\mu)=2\tilde f l^\mu n_\mu=0 \qquad (100)$$

ואז ברור ש-$l^\mu+\tilde f n^\mu$ נול לכל $\tilde f$: l^μ ו-n^μ מקבילים. אם כן מצאנו ש

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}=f\frac{dx^\mu}{d\sigma} \qquad (101)$$

בתרגיל נראה שזו משוואה גאודטית גם כן.

יב. שמורות לקוו עולמי גאודטי

בגאומטריה רימנית בעלת סימטריה, יש שמורה. למשל
נניח שאפשר לכתוב המטריקה בקואורדינטות מסוימות
כך שהיא אינה תלויה ב x^0. אזי נקבל ש

$$\frac{d}{d\sigma}\Big(\underbrace{g_{0\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}}_{U_0}\Big)=0 \tag{102}$$

הגזירה נותנת

$$\frac{dU_0}{d\sigma}=g_{0\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\underbrace{g_{0\alpha,\beta}}_{g_{0\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}+g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{0\beta}}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} \tag{103}$$

$$\frac{dU_0}{d\sigma}=g_{0\alpha}\underbrace{\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2}+\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right)}_{0}+g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{0\beta}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} \tag{104}$$

כידוע

$$g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{0\beta}=\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g^{\mu\delta}\left(g_{\delta 0,\beta}+\cancel{g_{\beta\delta,0}}-g_{0\beta,\delta}\right) \tag{105}$$

בגלל שאין תלות ב x^0

$$=\frac{1}{2}\left(g_{\alpha 0,\beta}-g_{0\beta,\alpha}\right)$$

זה אנטיסימטרי ב α,β ומצומצם עם $\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma}$ לכן מקבלים אפס. ולכן ש (102) נכון.
ויש לנו שמורה

$$U_0=g_{0\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \tag{106}$$

במילים, כל זמן שהמטריקה אינה תלויה ב x^ξ,
ויש לנו שמורה

$$U_\xi=g_{\xi\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} \tag{107}$$

החוק הזה נכון גם לפוטון, וגם לחלקיק בעל מסה.
כדי לפרש מהות השמורה נעבור למקרה המינקובסקי.
יש

$$U_0=-\frac{dt}{d\sigma} \tag{108}$$

לכן U_0 - הוא אנרגיה (עד כדי פקטור קבוע). כעת

לשמר אנרגיה צריך להתאים שמור אינו תדירות. אכן אם נביט בסעיף ח נראה שישנה תדירות שמורה שקראנו לה Δt/1. היחס בינה לבין התדירות הנמדדת ע"י צופה נייח הוא $\sqrt{-g_{00}}$ בו במקום. זה אומר שכאשר פוטון נע, תדירותו נראית ע"י צופים נייחים, כמשתנה בהתאם לכמות $(-g_{00})^{1/2}$. ונצא שתופעת ההסחה לאדום שגולה לקביעה ש U_0 לפוטון הוא שמור כאשר המטריקה לא תלויה בזמן.

נניח עתה שמטריקה אינה תלויה בקואורדינטה x^1 שתחום שלה מתמשך לאינסוף. למשל

(109) $$ds^2 = -A\,dt^2 + B\,dx^2 + C\,dy^2 + D\,dz^2$$

עם A, B, C, D בלתי תלויים ב x ועם $-\infty < x < \infty$. אזי נשאף לגבול המינקובסקי

(110) $$, U_x = g_{11}\frac{dx}{d\sigma} = B\frac{dx}{d\sigma} \rightarrow \frac{dx}{d\sigma}$$

רואים שמתקבל התנע הרגיל בכוון x (עד כדי קבוע).

כמו כן, אם x^1 הוא קואורדינטה $0 \le \varphi \le 2\pi$ והמטריקה ב $2\pi = \varphi$ זהה לזו ב $\varphi = 0$, אזי האנלוג המינקובסקי נותן

(111) $$U_\varphi = g_{\varphi\varphi}\frac{d\varphi}{d\sigma} \rightarrow r^2\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{d\sigma}$$

ורואים ש U_φ פירושה תנע זוויתי סביב הציר z (שוב עד כדי קבוע). כך כמו במכניקה ניוטונית אנלוגית מצאנו ששמור קשור עם סימטריות, הפעם סימטריות הגאומטריה.

3. אנליזה טנזורית

א. אינבריאנטיות לורנץ וקובריאנטיות כללית

בעקרון אפשר לקבל את כל הפיסיקה הלא גרביטציונית בדרך שקבלנו בה בבנית משוואת הגאודזיות, כלומר, כותבים חוק בצורה אינבריאנטית לורנץ, רואים אותו כנכון בכל מערכת לורנץ מקומית, ומתרגמים אותו בעזרת (סגל) למערכת קואורדינטות כלליות של הגאומטריה הרימנית.

הבעיה של דרכנו הקודמת לגבי גישה זו הוא

הנה פרמיק מסובך. במרומז פותח גישה אלטרנטיבית המשתמשת בעקרון הקוברינטיות הכללית. העקרון אומר:

"חוק פיסיקלי בנוכחות כבידה צריך להיות בעל צורה אינברינטית תחת טרנספורמצית קואורדינטות כלליות. כאשר המטריקה מוחלפת במטריקת לורנץ הוא צריך לעבור לחוק המקובל ביחסות הפרטית."

למשל, הפעולה ב(92) אינברינטית תחת טרנספורמציה כללית של קואורדינטות. היא מובילה למשוואה הגאודסית שהורכשת תכונה זו (אף כי זה יותר קשה לראות ישירות). כאשר מחליפים $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ מקבלים ממשוואה הגאודסית המשוואה

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} = 0 \qquad (112)$$

שהיא המשוואה הנכונה לחלקיק חופשי ביחסות פרטית. לפי עקרון הקוברינטיות, יש לקבל עקרון הווריאציה (94) כנכון בנוכחות הכבידה. 22

יש לציין, כמו שעשה Kretschman מוקדם בתולדות היחסות, שעקרון הקוברינטיות קרוב לריק מתוכן. שלא כמו עקרון היחסות, עקרון הקוברינטיות אינו דרך לגלות שחוק עבור פיסיקה מסוימת הוא כשר. אם ניקח חוק שרירותי כתוב בצורה אינברינטית לורנץ, ונעשה בו תרגום קואורדינטות $x^\mu \to \xi^a$ נקבל בהכרח חוק אינברינטי תחת טרנספורמציה כללית של קואורדינטות. ואפילו אם נתחיל בחוק שאיננו אינברינטי לורנץ, גם נקבל בדרך זו חוק אינברינטי תחת טרנספורמציות כלליות. אבל התורה לא תהיה נכונה. ציות לקוברינטיות אינה מבטיחה פיסיקה טובה. יש להבין את עקרון הקוברינטיות כך: אם במרחב מינקובסקי מוסכם שחוק פיסיקלי הוא אינברינטי לורנץ ומתאים למציאות, כתיבתו בצורה קוברינטית כללית תקח בחשבון את כל האפקטים של שדה הכבידה על הפיסיקה הנידונה. למשל (112) הוא חוק התנועה הנכון במרחב מינקובסקי והוא אינברינטי לורנץ, תרגומו לקואורדינטות כלליות הוא המשוואה הגאודסית (42) שהינה המשוואה הנכונה בנוכחות כבידה.

יש גם לציין שעקרון היחסות, אם יתפרש בצורה נאיבית, ריק מתוכן כמו עקרון הקוברינטיות המפורש של E כהלכה. נגיד שמתחיל במשוואת ניוטון

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{g} \qquad (113)$$

מתרגם $\vec{x}$ ו- t לפי טרנספורמצית לורנץ ל- $\vec{x}'$ ו- t', עכשיו המשוואה תהיה צורה אינברינטית לורנץ, כלומר אותה צורה לאחר עוד טרנספורמציות

לורנץ, מלבד הופעת מהירות המערכת ביחס למערכת
של (113) הויטלקיות. כלומר כל מה שמבדיל חוק
זה האינבריאנטי לורנץ מחוק הגלילאי של יחסות
הפרטית הוא הופעת מערכת מוחלטת. אך מוסכם
שאין דבר כזה, אזי אינבריאנטיות לורנץ כן מפיקה
את החוקים הנכונים.

כאשר מתרגמים חוק מוחלט פרטית לקואורדינטות
כלליות, מופיעים גם כן אלמנטים חדשים (כמו
המערכת המוחלטת) שהם $g_{\mu\nu}$ ו- T^{μ}_{ν}. אנו מתארים
הופעתם ~~ופירושם~~ אותה כתוצאות קיום
שדה הכבידה.

ביחסות פרטית המשמעות של חוק אינבריאנטי לורנץ
היא משוואה בין וקטורים מאותו סוג, טנזורים
מאותו סוג, וכו'. לכן כדי להגשים עקרון
הקווריאנטיות נצטרך להבין חוקי הטרנספורמציה
של הכמויות הפיסיקליות השונות תחת טרנספורמציות
כלליות.

ב. סקלרים, וקטורים וטנזורים

סקלר הינו כמות אינבריאנטית תחת טרנספורמציה
כללית, במובן ש

$$\phi'(x'^\mu) = \phi(x^\mu) \qquad (114)$$

יש להדגיש שבמערכת החדשה הכמות תלויה בצורה
שונה בקואורדינטות. אך הערך הנומרי שלה שווה
בשתי המערכות לגבי אותה נקודה. דוגמה
של סקלר הוא לחץ נוזל אידיאלי או צפיפות
העצמית של אנרגיה (עיין סעיף 1, יט).

הדיפרנציאל dx^μ הוא דוגמה של וקטור
קונטרבריאנטי. כיוון ש

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \qquad (115)$$

הרי שתחת טרנספורמציה $x^\mu \to x'^\mu$ וקטור
קונטרבריאנטי עובר לפי

$$V'^\mu(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} V^\beta(x^\alpha) \qquad (116)$$

דוגמה של וקטור כזה הוא המהירות של חלקיק
$\frac{dx^\mu}{d\tau}$.

הגרדיינט של סקלר הוא דוגמה של וקטור קווריאנטי.
חוק הטרנספורמציה הוא

$$\frac{\partial \phi(x'^{\mu})}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \phi(x^{\mu})}{\partial x^{\beta}} \tag{117}$$

ובאופן כללי.

$$U'_{\alpha}(x'^{\mu}) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} U_{\beta}(x^{\mu}) \tag{118}$$

דוגמה לווקטור קווריאנטי הוא וקטור הגל שהוא גרדיאנט פזת גל (עיין סעי' ח.1).

הצמצום $V^{\mu} U_{\mu}$ הינו סקלר כי

$$V'^{\mu} U'_{\mu} = \underbrace{\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}}}_{\delta^{\gamma}_{\beta}} V^{\beta} U_{\gamma} = V^{\beta} U_{\beta}. \tag{119}$$

דוגמה אפשר להגדיר טנזורים עם כמה אינדקסים משני הסוגים, כל אינדקס עובר לפי חוק כמו (116) או כמו (118). למשל, טנזור תנע-אנרגיה יעבור לפי

$$T'_{\alpha\beta}(x'^{\alpha}) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T_{\mu\nu}(x^{\alpha}) \tag{120}$$

זהו גם חוק טרנספורמציה המטריקה (17). המטריקה ההפוכה עוברת כמו טנזור מדרגה שניה קונטרווריאנטי. כי אם אכן נכונה

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} \tag{121}$$

אזי

$$g'^{\mu\nu} g'_{\nu\gamma} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}}}_{\delta^{\delta}_{\beta}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\gamma}} g^{\alpha\beta} g_{\delta\epsilon} \tag{122}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\gamma}} \underbrace{g^{\alpha\delta} g_{\delta\epsilon}}_{\delta^{\alpha}_{\epsilon}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta^{\mu}_{\gamma}$$

כמו שצריך

עם שתי צורות המטריקה נותן את היכולת להוריד אינדקסים ולהפוך טנזור קוברינטי לקונטרווריאנטי וכו'. ניתן גם לעשות צמצום למשל

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V^\mu V_\mu \qquad (123)$$

שקבענו שהוא אינוריאנט.

משוואה קווריאנטית היא תנאי הכרחי לבטוי נכון של חוק פיסיקלי. דוגמאות הן

$$V^\mu = f^\mu \qquad T^\mu{}_\mu = \phi \qquad T^{\alpha\beta} V_\beta = f^\alpha \qquad (124)$$

סכום, הפרש או מכפלה של טנזורים הם גם טנזורים (במקרה סכום והפרש רק אם הם מאותו סוג) בתנאי ששניהם מחושבים באותה נקודה, שכן פקטורי הטרנספורמציה
$\partial x'^\mu/\partial x^\alpha$
תלויים בנקודה. לכן x^μ עצמה או ההפרש הסופי Δx^μ אינו וקטור כי מדובר בסכום של dx^μ בנקודות שונות.

23

ג. צפיפויות סקלריות וטנזוריות

לא כל כמות גאומטרית בלי אינדקסים היא סקלר, ולא כל כמות כזו עם אינדקסים היא טנזור!

למשל ניקח את דטרמיננטת המטריקה

$$g \equiv \mathrm{Det}(g_{\mu\nu}) \equiv |g_{\mu\nu}| \qquad (125)$$

מחוק הטרנספורמציה

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \qquad (126)$$

אפשר לראות שבלשון מטריצות

$$(g') = \left(\overline{\frac{\partial x}{\partial x'}}\right)(g)\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \qquad (127)$$

ניקח דטרמיננטה

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g \qquad (128)$$

לכן g אינו סקלר. הוא נקרא "צפיפות" סקלרית ממשקל 2 – כי בחוק מופיע היעקוביאן $|\partial x/\partial x'|$

לתצוקה 2- (הרי $|\partial x/\partial x'| = |\partial x'/\partial x|^{-1}$).

אפליקציה חשובה של כל זה: לפי האינפי בטרנספורמציות קואורדינטות

$$(129)\qquad d^4x' \equiv dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x$$

לעת עתה נזכור שהדטרמיננטה g שלילית כי מספר הערכים העצמיים של המטריצה (g) שווה לזה של (η), כלומר אחד שלילי ושלשה חיוביים, ולכן $|g|<0$ בהכרח למטריקה פיסיקלית. לכן אם משווה (128) עם (129) נקבל ש

$$(130)\qquad \sqrt{-g'}\, d^4x' = \sqrt{-g}\, d^4x$$

כלומר $\sqrt{-g}\,d^4x$ סקלר. כל זה אומר שכאשר רוצים לבנות אינטגרל על מרחב הזמן יש לקחת המידה $\sqrt{-g}$ גם בנוסף ש d^4x בעצמו הוא לא סקלר אלא צפיפות סקלרית עם משקל אחד.

עוד תוצאה חשובה נוגעת מההגדרה המקורית של האינווריאנטיות של הטרנספורמציה $x \to x'(x)$. נזכור שוב הסימן של לוי-צ'יביטה:

$$(131)\qquad e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{סדר אינדקסים } (0123) \\ -1 & \text{סדר אינדקסים } (1023) \\ 0 & \text{אם כמה אינדקסים שווים} \end{cases}$$

ואז במילים ש $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ אנטיסימטרית

$$(132)\qquad \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| e_{\mu\nu\sigma\tau} = e_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\tau}$$

אבל לפי (128)

$$(133)\qquad \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}}$$

ולכן

$$(134)\qquad \sqrt{-g'}\, e_{\mu\nu\sigma\tau} = \sqrt{-g}\, e_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\tau}$$

רואים שהביטוי

$$(135)\qquad \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \equiv \sqrt{-g}\, e_{\mu\nu\sigma\tau}$$

מהווה טנזור קווריאנטי אנטיסימטרי מסדר 4. H.ה

טנזור לוי-צ'יביטה. הסימן $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ אינו
אלא צפיפות טנזורית.

נעלה האינדקסים של הטנזור $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\sigma\gamma} g^{\tau\delta} \qquad (136)$$

עפ"י הגדרה של דטרמיננטה זה נותן (זכור: דטרמיננטה של מטריצה ההפוכה הוא 1 חלקי הדטרמיננטה)

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\cdot g^{-1} e_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{e_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{-g}} \qquad (137)$$

או במילים אחרות

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-1}{(-g)}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad (138)$$

יותר מאוחר נעמוד על חשיבותו של טנזור לוי-צ'יביטה בקביעת אלמנטי נפח ב 4 או 3 ממדים.

9. הנגזרת הקוברינטית

לא כל אובייקט בעל אינדקסים הוא טנזור. למשל אם נשווה המשוואה הגאודזית בקואורדינטות כלליות (52) עם אותה משוואה במערכת לורנץ מקומית (38) שמתקבל ש Γ מתאפס בקואורדינטות מינקובסקיות. אבל טנזור שכל רכיביו מתאפסים הוא אפס בכל מערכת קואורדינטות. לכן Γ אינו טנזור.

הנגזרת של סקלר מהווה וקטור קווריאנטי. אבל הנגזרות של וקטור אינן מהוות טנזור. כי

$$\frac{\partial V'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}V^{\gamma}\right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}V^{\gamma}{}_{,\mu} + V^{\gamma}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial^{2} x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\gamma}} \qquad (139)$$

האבר השני אינו מאפשר לחלק הטרנספורמציה של וקטור קונטרווריאנטי. למרות זאת יש משמעויות רחבות. בלי החלק הנוסף היה מנוסח כמשוואה בין גדלים של כמויות שונות, כמו וקטורים וטנזורים. איך נגדיר נגזרת של וקטור או של טנזור בצורה כזו שהנגזרת תהיה טנזור, כך שנוכל לנסח חוקי פיסיקה קוברינטיים עפ"י עקרון הקוברינטיות?

דרך אחרת מתבררת מהתבוננות על משוואה הגאודזית (42). נכתוב אותה

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}+\Gamma^\alpha_{\nu\mu}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)=0 \tag{140}$$

כאן פשוט התייחסנו לווקטור $dx^\alpha/d\sigma$ כעל פונקציה של הקואורדינטות שהן פונקציות של σ. משוואה הגאודזית מקבלת אותה צורה בכל מערכת קואורדינטות. לכן האיבר בסוגריים כאן חייב להיות טנזור כך שבמכפלה עם הווקטור $dx^\mu/d\sigma$ יתן וקטור אמיתי שיכול להתאפס בכל מערכת קואורדינטות כפי שבמשוואה (140) טוענת. לכן סביר שאם V^α וקטור כלשהו אז

$$\nabla_\mu V^\alpha \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu}+\Gamma^\alpha_{\nu\mu}V^\nu = \text{טנזור מעורב} \tag{141}$$

נוכיח זה.

ראשית כל נבדוק מהו חוק הטרנספורמציה של Γ כאשר עוברים בין שתי מערכות כלליות. ההגדרה של Γ הייתה (עיין סעיף 4)

$$\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma}=\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

ולכן

$$\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}=\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma} \tag{142}$$

24

במעבר נוסף $x^\mu \to x'^\mu$

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\gamma}\equiv\frac{\partial x'^\mu}{\partial\xi^a}\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x'^\alpha\partial x'^\gamma}=\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^a}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\epsilon}\right) \tag{143}$$

מסדרים את המשוואה

$$=\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^a}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial^2x^\epsilon}{\partial x'^\alpha\partial x'^\gamma}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\epsilon}+\frac{\partial^2\xi^a}{\partial x^\delta\partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\right)$$

$$=\frac{\partial x^\rho}{\partial\xi^a}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial\xi^a}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial^2x^\epsilon}{\partial x'^\alpha\partial x'^\gamma}+\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\Gamma^\rho_{\delta\epsilon}$$

$$=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\Gamma^\rho_{\delta\epsilon}+\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial^2x^\epsilon}{\partial x'^\alpha\partial x'^\gamma}$$

רואים במפורש שאבר השני לא שייך לחוק טרנספורמציה של טנזור.

וגם את כושר האבר האי-הומוגני ב (143) מתוך נגזרת שנייה של x' לגבי x. כדי להחליף מה שיש לכבר נגזור הזהות

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma} = \delta^\mu_\gamma \qquad (144)$$

לפי x'^α ונקבל

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\epsilon}\frac{\partial^2 x^\epsilon}{\partial x'^\alpha \partial x'^\gamma} = -\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x^\epsilon}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma} \qquad (145)$$

$$= -\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\epsilon}$$

ולכן

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\gamma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\Gamma^\rho_{\delta\epsilon} - \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\epsilon} \qquad (146)$$

מיד נוכל להשתמש בצורה הטרנספורמציות הנ"ל.

כעת נכתוב את מוצמד $\nabla_\mu V^\alpha$ במערכת החדשה

$$\nabla'_\mu V'^\alpha = \frac{\partial V'^\alpha}{\partial x'^\mu} + \Gamma'^\alpha_{\nu\mu} V'^\nu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} V^\gamma_{,\beta} \qquad (147)$$

$$+ V^\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\mu}\Gamma^\rho_{\delta\epsilon} V'^\nu$$

$$- \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\epsilon} V'^\nu$$

דומה ש $\frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\nu} V'^\nu = V^\epsilon$ אנו רואים ששני אחרים מצטמצמים. לכן

$$\nabla'_\mu V'^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\nabla_\beta V^\gamma \qquad (148)$$

שמוכח שבנגזרת המתקנת (141) מהווה טנזור מעורב. ה $\nabla_\mu V^\alpha$ נקראת הנגזרת הקווריאנטית של V^α.

רצוי שנגזרת קווריאנטית תקיים את חק לייבניץ

$$\nabla_\mu (V^\alpha U^\beta) = \nabla_\mu V^\alpha \cdot U^\beta + V^\alpha \nabla_\mu U^\beta \tag{149}$$

אם הדרישה בכך קונסיסטנטיות דורשת שעבור טנזור קונטרוריאנטי כלשהו תוגדר הנגזרת הקווריאנטית כך:

$$\nabla_\mu T^{\alpha\beta\gamma\cdots} = \frac{\partial T^{\alpha\beta\gamma\cdots}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T^{\sigma\beta\gamma\cdots} + \Gamma^\beta_{\mu\sigma} T^{\alpha\sigma\gamma\cdots} + \cdots \tag{150}$$

ואז נגזרת הקווריאנטית של טנזור הוא טנזור עם דרגה אחת יותר.

לגבי וקטור קווריאנטי עם חוק טרנספורמציה (118) מגדירים הנגזרת הקווריאנטית כך:

$$\nabla_\mu V_\beta = \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} V_\alpha \tag{151}$$

יש לשים לב לסימן ההפוך. ההוכחה משתמשת ב (143) ודומה שקודמתה. בדומה ל (150) דורשים עתה

$$\nabla_\mu G_{\alpha\beta\gamma\cdots} = \frac{\partial G_{\alpha\beta\gamma\cdots}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} G_{\sigma\beta\gamma} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} G_{\alpha\sigma\gamma\cdots} - \cdots \tag{152}$$

לגבי טנזור מעורב, שוב כדי לקבל קונסיסטנטיות מגדירים

$$\nabla_\mu S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\cdots} = \frac{\partial S^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta\cdots}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} S^{\sigma\beta}{}_{\gamma\delta\cdots} + \Gamma^\beta_{\sigma\mu} S^{\alpha\sigma}{}_{\gamma\delta\cdots} - \Gamma^\sigma_{\gamma\mu} S^{\alpha\beta}{}_{\sigma\delta\cdots} \cdots \tag{153}$$

הנגזרת הקווריאנטית של $g_{\alpha\beta}$, המטריקה, מתאפסת. לראות זה נכתוב לפי (152)

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} g_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} g_{\beta\sigma} \tag{154}$$

וזה אפס עפ"י (86) אומרים שהגאומטריה "..."