יחסות וגרביטציה

1. היחסות הפרטית

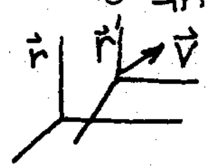
א. עקרון היחסות הגליליאנית

כבר גליליאו גליליי ציין שיש לצפות שתופעות מכניות תתרחשנה בצורה דומה באוניה מפליגה בצורה חלקה או על הקרקע. כלומר תנועה אחידה אינה משנה לצורת התהליך. תהליכים האלה הם חוקי ניוטון. למעשה חוק הראשון - חוק האינרציה - אינו אלא הגדרה של מערכת ייחוס בה חוקי ניוטון השני והשלישי תופסים כפשוטם. מערכות מיוחדות כאלה נקראות אינרציאליות. התגלית של גליליאו היתה שחוקי המכניקה תקפים בכל המערכות שנעות במהירות אחידה יחסית למערכת אינרציאלית כפשוטם. נבדוק את זה מחוק ניוטון השני

$$m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec f \qquad (1)$$

זאת כתובה במערכת מסוימת $\{\vec r, t\}$. במערכת אחרת $\{\vec r', t'\}$ המוגדרת לפי

$$\begin{aligned} \vec r' &= \vec r - \vec V t \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (2)$$



הנעה ביחס לראשונה במהירות $\vec V$, התאוצה זהה ולכן חוק (1) תופס גם כן. המערכת $\{\vec r', t'\}$ היא, אם כן, גם כן אינרציאלית.

הסימטריה של המכניקה תחת מעבר ממערכת למערכת יותר רחבה. למעשה אם מדובר במערכת של חלקיקים ללא כל אינטראקציה, פרט לכבידה,

$$m_i\frac{d^2\vec r_i}{dt^2} = -\sum_j \frac{G\, m_i m_j (\vec r_i - \vec r_j)}{|\vec r_i - \vec r_j|^3} \qquad (3) \qquad i = 1, 2\ldots \quad j = 1, 2\ldots$$

המשוואה נשארת אותו דבר תחת הטרנספורמציה

$$\begin{aligned} \vec r' &= \Theta\vec r - \vec V t + \vec d \\ t' &= t + \tau \end{aligned} \qquad (4)$$

כאשר Θ היא מטריצה אורתוגונלית המסובבת סביב. טרנספורמציות (4) מהוות חבורה - החבורה הגליליאנית שאומרת שלמכניקה יש סימטריה תחת העתקות, סיבובים ומעבר בין מערכת אינרציאלית לאחרת.

ותכונת גליליאניות פרושה שאין דרך להבחין ע"י ניסוי מכניקה בין שתי מערכות הקשורות ע"י טרנספורמציה מהצורה (4).

ד. האלקטרודינמיקה אינה אינווריאנטית תחת חבורת גליליאו

עד סוף המאה התשע עשרה היו המכניקה של ניוטון והאלקטרודינמיקה של מקסוול את חלק הדינאמי של כל הפיסיקה. היה ברור, אבל, שאלקטרודינמיקה אינה אינווריאנטית תחת חבורת גליליאו: שלא כמו במכניקה בה כל הפרמטרים (כמו המסות) הם תכונות של החלקיקים, ולא של החוקים, באלקטרודינמיקה מופיעה מהירות האור כחלק מהחוקים. למשל

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

כאשר c הוא אכן מהירות גלי אור. לפי טרנספורמציות גליליאו מהירויות עוברות לפי

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} \qquad (6)$$

לכן אם במערכת אינרציאלית אחת c הוא אכן מספר אחד לכל הגלים, במערכת אחרת לא רק שמהירות הגלים תהיה שונה, אבל היא תהיה תלויה בכוון הגל - מהירות אניזוטרופית. מקסוול ובני דורו הכירו בבעיה הזו. מקסוול עצמו האמין שהמשוואות שלו תקפות לגמרי אך ורק במערכת אחת הנמצאת במנוחה ביחס לתווך אוניברסלי - האתר - שדרכו התווך שבו מתפשטים השדות האלקטרומגנטיים. בתווך זה מהירות האור היא אכן c, במערכת אחרת היא תהיה שונה לפי (6). לכן אסכולה זו דבקה בעקרון היחסות רק לגבי מכניקה.

הרעיון שמהירות האור תלויה במערכת נבדק, בכוונה או שלא בכוונה, במספר ניסויים חשובים. נזכיר ראשון את מדידת Fizeau של מהירות האור במים או נוזלים אחרים זורמים. ב 1859 Fizeau השתמש באינטרפרומטר למדוד המהירות כאשר האור התפשט לאורך זרימה או כנגדה. אם מהירות הזרימה היא V מצא Fizeau ש

$$u_{light} \cong \frac{c}{n} \pm V\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (7)$$

כאשר n הוא מקדם השבירה של הנוזל. תוצאה זו לא מתיישבת עם החוק הגליליאי (6) (בנוסף, מצביעים תוצאות האינטרפרומטר ביחס לאתר שכן היא נראה קטנה, ולכן מהירות האור בנוזל במנוחה היא c/n בדיוק רק לכל כוון).

עוד ניסוי חשוב ופשוט לכאורה היה זה של Trouton and Noble ב 1903. הם מדדו את המומנט הפועל על קבל טעון

התלוי חפשי מסוב. כדי להבין למה צפוי מומנט במסגרת מערכת האתר נחשוב על שני מטענים הפוכים

(8) $\vec{f}_-$, $\vec{r}$, $+q$, θ , $-q$, $\vec{v}$

לפי חשמל מטען q הנע במהירות $\vec{v}$ שקול לזרם I על קטע $d\vec{l}$ של מוליך דמוי חוט. כעת שני חוטים עם זרמים I_1 ו- I_2 מפעילים זה על זה כח הנתון ע"י חוק Biot-Savart (חוק Ampere)

$$\vec{f} = \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r})}{c^2 r^3} \qquad (9)$$

כאשר $\vec{r}$ המרחק בין $d\vec{l}_1$ ו- $d\vec{l}_2$. לפי האנלוגיה יפעל על המטען $+q$ כח בגודל

$$f_+ = \frac{q^2}{r^2}\frac{v^2}{c^2}\sin\theta \qquad (10)$$

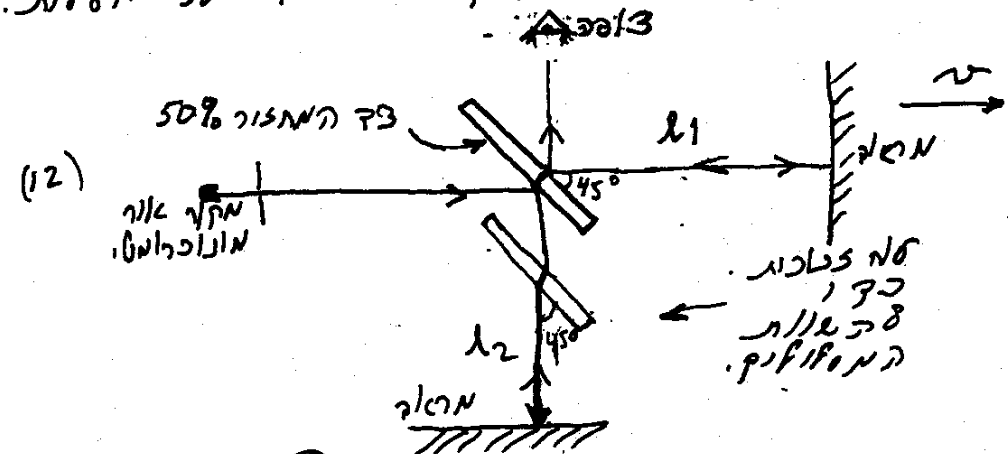
וכנ"ל המטען $-q$. נוצר, אם כן, מומנט

$$\tau = f_+ r\cos\theta = \frac{q^2}{2r}\frac{v^2}{c^2}\sin 2\theta \qquad (11)$$

שהוא מסדר v^2/c^2 קטן יותר מכל מומנט זעיר כח הקולומבי. בניסוי זה של Trouton and Noble הצליחו לראות שהמומנט המצופה לקבל אינו נמצא אף נוקח עד כמהירות הסיבובית של כדור ה⊕ מסביב לשמש, כ 30km/s.

אפילו קודם, ב 1887, ערכו Michelson ו- Morley את ניסוי המפורסם, חפשו אחרי תזוזת התאבכות באינטרפרומטר כאשר מסובבים אותו ב 90° מעלות.

(12)



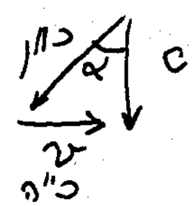
נניח שהאינטרפרומטר נע לפי ה⊕ ביחס לאתר. חשבון ודיוק מפורסם מראה שבסדר $(v/c)^2$ יווצר הפרש

מהלך אופטי בשווי

$$\Delta = (l_1 + l_2)v^2/c^2 \qquad (13)$$

בין זרוע אחד לשני. הפרש זה שקול לתזוזת התאבכות ב- Δ/λ אורכי גל שלמים. אם האינטרפרומטר יסובב ויתחלפו הזרועות אז ה- Δ יהיה עם סימן הפוך. לכן יהיה אפשר לראות שינוי מבנה ההתאבכות. הניסוי הזה בוצע ולא נמצאה התוצאה בדיוק כזה שאפשר היה לאמר ש $v < 10\ \frac{km}{s}$ במהלך השנים שלפני הדיוק ע"י הרחבת הזרועות בפקטור 5 בעזרת שקופים האופטיים. כוון שהניסוי בוצע בעונות שונות בשנה שכ"ה של באחד מהם לפחות היה לכדור הארץ במהירות $30\ \frac{km}{s}$ ולכן נשנה סתירה.

כדי לעשות שלום עם הניסוי הזה התפתח הרעיון של אתר נסחב עם גופים בדיוק כמו כדור הארץ. רעיון זה יכול לפתור את בעית Trouton & Noble ולכן של Michaelson-Morley, אך לא את המתעוררת מניסוי Fizeau. והאתר הנסחב מתנגש בתופעה של אברציה של הכוכבים. ב 1729 מצא Bradley, לימים האסטרונום המלכותי בבריטניה, שהמקום של כוכבים באזור קטן בשמים זז ביחס למקום הכוכבים באזורים אחרים בתנועה הלוך וחזור ובאמפליטודה של 41'' ומחזור שנתי. Bradley הבין שמדובר כאן בשינוי וקטור כוון האור בגלל תנועת מהירות כ"ה.



(14)

מה תמונה הזו הסביר Bradley את דרך המדידה הראשון למהירות האור מ- 300,000 km/s. אילו האתר היה נסחב עם כ"ה, לא היתה המסקנה של זו מתפרצת על טען הקרן האור מהכוכבים. לכן רעיון האתר הנסחב הסתבך. ← (1)

נסיונות אחרים להבין הניסוי בשנים ההם היו ההשערה של לורנץ ו- Fitzgerald שכל גוף הנע ביחס לאתר עובר כווץ בפקטור $\sqrt{1-v^2/c^2}$, והרעיון של Ritz שמהירות האור נקבעת ע"י מהירות המקור ולא ע"י התווך (תורת בליסטית). רעיונות אלה כושלים כנגד נסוי זה או אחר.

בסכום למדנו:

א) מנסוי Michaelson-Morley נובע שמהירות האור איזוטרופית בכל מערכת אינרציאלית.

ב) אין סימן של האתר לפי כל הנסויים.

תוצאה k) מתנגשת עם חוק ההרכבה של מהירויות הניוטוני (6). זאת אומרת שאין כבר כל סיבה חזקה להאמין שמשוואות מקסוול קיימות רק במערכת אחת בלבד, מה גם שלפיו נקודה בה אין סימן למערכת המיוחדת הזו.

ג. עקרון היחסות של אינשטיין

ב-1904 הראה לורנץ שמשוואות מקסוול הנטולות מקורות, כלומר (5) ועוד

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{15}$$

הן אינווריאנטיות תחת סוג טרנספורמציות חדש

$$\vec{r}\,' = \frac{\vec{r}_{\parallel}-\vec{v}t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \vec{r}_{\perp}\,; \qquad \vec{r}=\vec{r}_{\parallel}+\vec{r}_{\perp} \tag{16}$$

$$\vec{r}_{\perp}\cdot\vec{v}=0$$

$$t' = \frac{t-\vec{v}\cdot\vec{r}_{\parallel}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,; \tag{17}$$

אלה נקראות טרנספורמציות לורנץ עד פוק. יש לצרף אותן עם טרנספורמציות מתאימות של $\vec{E}$ ו-$\vec{B}$ כדי לקבל האינווריאנטיות. Poincare הרחיב את האינווריאנטיות לטרנספורמציות (Poincare). לורנץ חשב על הטרנספורמציות כקשורות לשינוי של כוח לאורך הנעים ביחס לאתר ואף גזר כוח זה מה משוואות עבור גוף שמבנהו אלקטרומגנטי בלבד.

כאן הופיע אינשטיין והעמיד הנושא על בסיס רחב ובלתי תלוי במודלים. אחת ההנחות שלו היתה שמהירות האור שווה לכל כיוון (איזוטרופיות) ובכל מערכת אינרציאלית. הניסוי שנעשה Michelson - Morley תומך באיזוטרופיות מהירות האור, אך אינו אומר דבר בנקודה השניה. הניסוי הישיר הראשון הוא זה של Kennedy and Thorndike מ-1932, אמנם הוא בוצע הרבה אחרי שהותאמה פרטות היתה לנושא ספור.

בניסוי זה האינטרפרומטר בעל זרועות באורך די שונה שלא כמו ב (12). ההפרש של כ-16cm גורם לאחד מהמסלולים להיות ארוך יותר בכ-300,000 אורכי גל, אבל מספר כזה תלוי, כמובן, במהירות האור. כעת במשך השנה כ"ה עובר ממערכת אינרציאלית אחת לאחרת. כך, למשל, בהפרש 6 חדשים הוא נמצא במערכות הנעות זו ביחס לזו במהירות 60 km/s. אם c משתנה עם מערכת, צפוי שינוי מבנה ההתאבכות על פני זמן של חדשים. הניסוי כל משך חודשים בוצעו ואפשר לקבוע ש-c אינו משתנה יותר מ-3 m/s בין מערכות הנעות ב-60 km/s אחת ביחס לשניה.

אם כן, ישנו בסיס נסיוני מוצק להנחה שמהירות האור קבוע אוניברסלי.

הנחות של איינשטיין היו:

א. <u>עקרון היחסות</u>: כל חוקי הטבע זהים בצורתם בכל מערכות האינרציאליות. ערכים המספריים של פרמטרים המופיעים בחוקים (קבועי טבע) הם גם זהים בכל המערכות.

ב. <u>מהירות האור</u> אינה תלויה במהירות המקור.

ההנחה השניה שקולה עם קביעות מהירות האור בכל מערכת ובכל הכוונים.

בהנחה הראשונה דרש איינשטיין אינווריאנטיות הן של משוואות המכניקה והן של משוואות האלקטרומגנטיות במעבר בין מערכות אינרציאליות אחת לאחרת. כיוון שמשוואות מקסוול אינן אינווריאנטיות תחת טרנספורמציות גליליאו, קבע איינשטיין שטרנספורמציות האלה אינן מדויקות. זה גם ברור כי אלה אינן מתאימות למהירות האור אינווריאנטית כדרוש בהנחה השניה.

בחירתו של איינשטיין לנטוש את חבורת גליליאו נובעת הידיעה כי הטרנספורמציות האלה הן מאד אינטואיטיביות. ומכיוון שחוקי ניוטון, כמשל השני, אינווריאנטיים תחת טרנספורמציות גליליאו, עקרון היחסות מטיל ספק באמינותם - או דורש - של חוקי ניוטון, במולבד השני. זה היה קשה לאנשים לקבל.

יש לציין שגם Poincare בזמנו הגיע עד להשלכות על חוקי ניוטון של קביעות מהירות האור.

ד. <u>טרנספורמציות לורנץ</u>

כאן נגזור טרנספורמציות לורנץ (16-17) מתוך עקרון קביעות מהירות האור ועוד כמה הנחות סבירות. אנו מתרחקים כאן ממאמרו של איינשטיין על היחסות הפרטית.

עקרונית המעבר בין שתי מערכות אינרציאליות יתבצע עם הטרנספורמציות

$$(18)\qquad x' = \xi(\vec{r},t) \qquad y' = \eta(\vec{r},t) \qquad z' = \zeta(\vec{r},t) \qquad t' = \tau(t,\vec{r})$$

אבל אלה כלליות מדי. אנו מניחים שבערכה הינה הומוגנית. זה אומר שאין לשום מקום העדפות של הקואורדינטות כל השלבה פונקציות לינאריות, נניח שני מאורעות, A ו- B בזמן אחד יש במערכת השניה.

7

שכל הקואורדינטות ברמה אחת, הלינאריות חובה להיות גם לגבי הארגומנטים y ו- z.

ואם נשנה ראשית הזמן זה לא אמור להשפיע על אורך המקל במערכת השניה. זה דורש לינאריות ξ, η, ζ בארגומנט t

$$x'_A - x'_B = \xi(\vec{r}_A, t+b) - \xi(\vec{r}_B, t+b) = \xi(\vec{r}_A, t) - \xi(\vec{r}_B, t) \quad (20)$$

אותו שינוי בראשית הזמן t לא אמור לשנות פרק זמן שעון במערכת השניה. זה דורש לינאריות τ בארגומנט t:

$$t'_C - t'_D = \tau(t_C + d, \vec{r}) - \tau(t_D + d, \vec{r}) = \tau(t_C, \vec{r}) - \tau(t_D, \vec{r}) \quad (21)$$

כמו כן הזזת הראשית $x \to x + a$ אינו צריך להשפיע על פרק זמן שעון באף מערכת וזה דורש לינאריות τ בארגומנט x (וכמובן y ו- z)

$$t'_C - t'_D = \tau(t_C, x+a, y, z) - \tau(t_D, x+a, y, z) = \tau(t_C, x, y, z) - \tau(t_D, x, y, z) \quad (22)$$

המסקנה הסופית: הטרנספורמציות בין $\{\vec{r}, t\}$ ל $\{\vec{r}', t'\}$ חייבות להיות לינאריות בכל המשתנים.

כעת נבחר צירים x, y, z ו- x', y', z' כך שצירים x ו- x' מקבילים לכוון המהירות היחסית $\vec{v}$ בין המערכות. את y, y' נבחר מקבילים ונבחר לאותו כוון, וכנ"ל z, z'. התנועה מוגבלת ציר x' על ציר x.

נחשוב על מקל המכוון עם ציר y וקצותיו ב y_A, y_B עם $x=0$, $z=0$. אורכו במערכת השניה הוא

$$y'_A - y'_B = \eta(0, y_A, 0, t_A) - \eta(0, y_B, 0, t_B) \quad (23)$$

והפרש הזמנים במערכת החדשה הוא

$$t'_A - t'_B = \tau(t_A, 0, y_A, 0) - \tau(t_B, 0, y_B, 0) \quad (24)$$

נקח $y_B = -y_A$ ו- $t_A = t_B = t$, כלומר $y_A - y_B$ הוא אורך המקל במדידות בו זמניות של קצותיו. מסימטריה ברור שצריך $t'_A = t'_B = t'$, השיקול כאן הוא סימטריה ללא החוק הפיזיקלי (2) שאינו מתאים כאן.

אם נעזר בפונקציות (23) נקבל

$$y_A' - y_B' = \eta(0, y_A - y_B, 0, t) = \lambda(v)(y_A - y_B) \tag{25}$$

כיון ש η הוא המקדם של בסיס הלינארי, אין תלות ב t שכן זה היה הורס את האינווריאנטיות תחת שינוי ראשית הזמן. כשאנו הופכים את מערכת K' כראשונה ו $\{x', t'\}$ כשניה הוויו מקבלים

$$y_A - y_B = \lambda(-v)(y_A' - y_B') \tag{26}$$

כי המהירות הפוכה. באופן קונסיסטנטי של המשוואות מקבלת

$$\lambda(v)\,\lambda(-v) = 1 \tag{27}$$

אבל לא ייתכן ש $\lambda(v) \neq \lambda(-v)$. אם כך היה רכבת המגיעה למהירות גבוהה היתה נראית מתפחסת כי קרשי המסילה התכווצו, ומצד שני מנקודת ראות אדם העומד ליד המסילה, היא היתה נראית מתפחסת כי המרחק בין הגלגלים התקצר. הסתירה מוכיחה שבהכרח $\lambda(v)=1$. כמובן שכל הארגומנטים תקפים לגבי הקואורדינטה z. המסקנה היא שהקואורדינטות הניצבות למהירות היחסית אינן עוברות טרנספורמציה.

$$y' = y \qquad z' = z \tag{28}$$

הפונקציות של הפונקציות ζ, η מבטיחה שמסקנה זו עדיין תקפה כאשר ה x או ה t שונים ממה שהיו בארגומנט.

מהפונקציות (24) נקבל

$$0 = \tau(t, 0, y_A - y_B, 0) = \Lambda(v)(y_A - y_B) \tag{29}$$

שוב, התלות ב t נעלמת מהנימוק הקודם. ברור מכאן ש $\Lambda = 0$. המסקנה היא שטרנספורמצית הזמן אינה מושפעת מהקואורדינטות הרוחביות לתנועה היחסית. זה עדיין נכון עם ערכים שונים של t_A, t_B, z, x בגוף הפונקציות.

לאור האמור הטרנספורמציות (18) מצטמצמות ל

$$x' = a_1 x + a_2 t \qquad \text{וכו'}\ a_1(v) \tag{30}$$

$$t' = b_1 t + b_2 x \tag{31}$$

למעשה לינאריות לא מונעת הוספת קבועים לשתי המשוואות. אבל אם נקבע שהראשיות מתלכדות

ב-$t=0$, אזי אין הבדל בשאלה. כעת, הדרישה של התלכדות הראשיות ב-$t=0$ אומרת שבמשך הזמן הראשית של המערכת $\{x',t'\}$ תנוע ב $x=vt$. אם נציב זה ב (30) ביחד עם $x'=0$ נקבל

$$a_2 = -v\,a_1 \tag{32}$$

כך שבמקום (30) נקבל:

$$x' = a_1(x - vt) \tag{33}$$

רק עכשיו נשתמש בעקרון קביעות מהירות האור. נניח שברגע שראשיות המערכות חולפות זו ליד זו, יש שם נצנוץ. חזית האור הולכת ויש לה, במערכת השניה, המשוואה

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \tag{34}$$

נציב כאן (28), (31) ו- (33) ונסדר אברים:

$$(a_1^2 - c^2 b_2^2)x^2 + y^2 + z^2 - c^2\left(b_1^2 - \frac{v^2}{c^2}a_1^2\right)t^2 - 2(a_1^2 v + c^2 b_1 b_2)\,xt = 0 \tag{35}$$

אבל קביעות מהירות האור פרושה שבמערכת הראשונה

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{36}$$

לכן אנו מסיקים שמקדמי x^2 ו- t^2 ב (35) יהיו אחד ומקדם xt יתאפס. זה נותן לנו

$$b_2 = \pm\frac{1}{c}\sqrt{a_1^2 - 1} \qquad b_1 = \pm\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}a_1^2} \tag{37}$$

$$a_1^2 v = -c^2 b_1 b_2 \tag{38}$$

אם נציב (37) ב (38) ונרבע נקבל

$$a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{39}$$

ולכן

$$b_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad b_2 = \frac{\pm v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{40}$$

עקרון התאמה אומר שבגבול $v \to 0$ יש לקבל $x' = x$ ולכן. זה נותן רק את הבחירה סימני a_1 ו- b_1 כחיוביים. אבל אז (38) מראה שסימן b_2 שלילי. לכן הטרנספורמציות הן

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y \qquad\qquad (41) \qquad\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

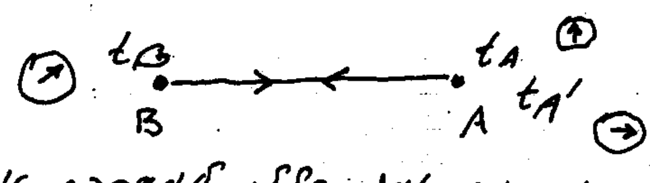
אלה צורות של (16)-(17) אבל כאן קבלנו אותן ישירות מקביעת מהירות האור. טרנספורמציות לורנץ אלה קושרות בין שתי מערכות אינרציאליות. לכן קוראים למערכות כאלה מערכות לורנץ.

ה. בו-זמנות

לפי טרנספורמציות גליליאו (2) אותו זמן תקף לכל המערכות האינרציאליות. לפי טרנספורמציות לורנץ (41) לכל מערכת לורנץ זמן משלה. אבל כאן מדובר על אותו זמן בכל מערכת שלמה. אופרטיבית הגדרת זמן כזאת כרוכה בהצבת שעונים בכל הנקודות במערכת, שעונים מסונכרנים, שכן כיצד נדע הזמן במאורע מסוים אם לא מסתכלים בשעון שם? סינכרון השעונים מהווה בעיה בגלל שאין אפשרות לתקשורת בו זמנית בין נקודות מרוחקות. אין אנו מכירים אותות הנעים מהר ממהירות האור. איינשטיין הנהיג שיטה לסינכרון השעונים במערכת. מנקודה A בזמן t_A לפי השעון המקומי שולחים אות אור לנקודה B. האות המתקבל גורם להחזרת אות מ-B ל-A מיידית, והאות השני מתקבל ב-A בזמן t_A'. לפי איינשטיין יש לסנכרן השעון של B כך שהוא מראה

$$t_B = \frac{t_A + t_A'}{2} \qquad (42)$$

ברגע קבלת האות מ-A.



אופרטיבית, אם כן יש זמן כזה למערכת אחת. זה נותן משמעות לטרנספורמציות לורנץ. מערכת התקן: הצבת סרגלי מדידה ערוכים שתי וערב ובכל מקום שעון מסונכרן לפי שיטת איינשטיין לחברו.

אנו רואים מ-(41) ששתי מאורעות בו זמניות ($t=0$) הנמצאות במקומות שונים ($x=0$, $x=\ell$) במערכת הראשונה קורות בזמנים שונים $t'=0$, $t'=-\gamma v\ell/c^2$ במערכת השניה. מכאן שמושג בו-זמנות אינו אבסולוטי, יחסי. יש לו משמעות רק במערכת אחת. למהירות קטנה הסטיה מבו-זמנות מסדר זמן מעבר האור בין המאורעות כפול v/c.

ו. דילטציית הזמן - פרדוקסת התאומים

שעון נמצא במערכת הנעה ב $x'=0$. הוא מראה זמן t'. לפי (41) השעון נע במערכת הראשונה לפי $x=vt$. נציב זה באחרונה במשוואות (41) ונקבל.

$$t' = \gamma t(1-v^2/c^2) = \gamma^{-1} t \qquad (43)$$

כיון ש $\gamma>1$, זה אומר שהשעון הנע מודד זמן קצר מהזמן שמודד שעון נח במערכת הראשונה. למעשה כאשר השעון נע ומודד t', שעונים שונים ממערכת הראשונה, הוא נראה מפגר יותר ויותר. זאת "דילטציית (נפוח) הזמן". אפשר להרים כאן קושי. התנועה היא יחסית. לכן השעון ב $x=0$ במערכת הראשונה צריך גם להיות בהשוואה לשעון ב $x'=0$ ונקבל סתירה. הטעות היא כאן בסוגיה של בו-זמניות. הפיגור של השעון ב $x'=0$ נמצא לגבי מערכת שעונים מסונכרנים במערכת הראשונה. אפשר לקבוע שהשעון ב-$x=0$ מפגר לגבי מערכת השעונים המסונכרנים במערכת השניה. אבל אין הסכמה שהשעונים במערכת השניה מסונכרנים כפי שצופה במערכת הראשונה רואה אותם. לכן נסיון לקבוע פגור הדדי באופן נסיוני יכשל בגלל בעיות תוסח בו-זמניות במערכת השניה. כמעט כל פרדוקסה כנגד התורה הפרטית יסודה באי-הבנה של בו-זמנות.

דילטציית זמן נבדקה ואושרה בכמה נסיונות. למשל, המזון π^+ הנו חלקיק בעל אורך חיים 2.56×10^{-8}. זה כאשר המזון מוחזק במהירות נמוכה. ב 1952 הראו Durbin, Loar, Havens שמזונים π^+ במהירות $0.75c$ יש אורך חיים יותר ארוך בפקטור 1.5 בהתאמה טובה לפקטור γ ב (43). זה כאילו השעון הפנימי ב π^+ מפגר כמו בדילטציה. ב 1964 הראו Hill ו Turner שכאשר שמים מקור קרינת גמא בחשוך דיסקה מסתובבת מהר, מרגיש גלאי במרכז בגלגל הפועל לפי אפקט Mossbauer (ללא בתנועה) תדירות קרני הגמא הפחותה מהערכות בפקטור γ. זה כאילו השעון הקובע התדירות של קרני הגמא מפגר. ב 1995 הראתה הקבוצה של Perlmutter שסקלת הזמן להתפוצצות סופרנובה בגלקסיה רחוקה המתרחקת מאיתנו במהירות שהיא שבר 0.1 ממהירות האור - שסקלת זמן זו מוארכת לפי פקטור γ ב (43) בהשוואה לסופרנובה קרובה שאינה נעה מהר לגבינו.

יש לשער שדילטציית הזמן תקפה לתהליכים ביולוגיים שהם כימיים - ולכן מושתתים על פיסיקת הקוונטים. מכאן נוצרת "פרדוקסת התאומים". תאום אחד נשאר על כ"ה ותאום השני נוסע בטיל במהירות קרובה ל c עושה סבוב בגלקסיה וחוזר. לפי תאום הנח הנוסע חייב להיות צעיר יותר. השאלה נעשית עם אותו שעון במערכת הראשונה, שעון התאום הנח, ולכן אין שאלה של אי קיום בו-זמנות. כמובן יש שאלה האם להשתמש לנוסחה (43) לגבי תנועה של הנוסע האצה כל הדרך (התאום השני חייב להאיץ), ויתר מאוחר נראה שאין התאוצה מהווה בעיה. אפקט התאומים נבדק באמצעות השוואת שני שעונים, אחד על הקרקע ואחד במטוס.

ז. כווץ לורנץ-פיצג'רלד של אורכים

המושג של אורך אבסולוטי, כמו המושג של פרק זמן, אינו אינווריאנטי במעבר בין מערכות לורנץ. ניקח מקל עם קצה אחד ב $x'=0$ וקצה השני ב $x'=d$. אורכו d במערכת לורנץ השניה. לפי (41) הנקודה $x'=0$ מתאימה לקשר

$$x = Vt \tag{44}$$

כאשר $x'=d$ מתאימה ל

$$x = Vt + d/\gamma \tag{45}$$

לכן אם נמדוד, במערכת הראשונה, את אורך המקל בזמן t מסוים, נמצא שאורכו הוא לא d אלא d/γ שקצר מ-d. זהו הכווץ (contraction) של לורנץ ופיצג'רלד. שוב יש להדגיש כי אין אפשרות ליצור סתירה ע"י השוואת שני מקלות באורך d אחד במערכת הראשונה והשני בשניה. אמנם המקל השני נראה קצר יותר במדידה בו-זמנית במערכת הראשונה, אבל מדידה זו לא בו-זמנית לפי המערכת השניה ולכן אין סתירה.

כפי שצוין בסעיף ד', אין שינוי בגדלים הניצבים. לכן כווץ לורנץ-פיצג'רלד במובן זה עוזר צורת הגופים הנבחנים ממערכת לורנץ שונה.

ח. חוק הרכבת המהירויות

גוף נע במהירות $\vec{v}$ במערכת הראשונה. מהי מהירותו במערכת השניה? ניקח הדיפרנציאלים של (41)

$$
(46)\qquad
\begin{aligned}
&(a) \quad dx' = \gamma\,(dx - V\,dt)\\
&(b) \quad dy' = dy\\
&(c) \quad dz' = dz\\
&(d) \quad dt' = \gamma\,(dt - V\,dx/c^2)
\end{aligned}
$$

נחלק (a) ב (d) ונקבל

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} \tag{47}$$

זה מתקן את חוק הגלילאי (6) שהיה בסתירה עם קביעות מהירות האור. החוק החדש עולה בקנה אחד עם עקרון קביעות האור. כי אם v_x היא מהירות קרן אור הנע בכוון x

$$v_x' = \frac{c - V}{1 - V/c} = c \tag{48}$$

כמו באינטואיציה שלנו אין דרך לקבל מהירות גדולה ממהירות האור ע"י הסתכלות על קרן אור שהוקרן על רכבת נע. כלומר אין מהירות האור תלויה במקור.

אם נחלק (46.b) ב (46.d) נקבל

$$(49) \qquad v_y' = \frac{v_y}{1 - V v_x/c^2}\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

עם גבולו מקביל עבור v_z' כפונקציה של v_z. הפקטור $\sqrt{\ }$ כאן מקורו בדילטציית הזמן.

נשתמש ב (47) לפתור את נוסחת Fizeau. ניקח זרם נוזל בעל מקדם שבירה n. הזרם נע פעם במהירות $+V$ לגבי המעבדה, ופעם ב $-V$. המהירות v_x' הוא פשוט c/n (כמו נפיצת האור בנוזל - במערכת המקורי הזה צריך לתקן עבור זה). לפי (47)

$$(50) \qquad c/n = \frac{v_x \mp V}{1 \mp V v_x/c^2}$$

נאסוף איברים עם v_x ונקבל

$$(51) \qquad v_x = \frac{c/n \pm V}{1 \pm V/cn} = \left(1 \mp \frac{V}{cn}\right)\left(\frac{c}{n} \pm V\right) + O\left(\frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{c}{n} \pm V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{V^2}{c^2}\right)$$

זאת נוסחת Fizeau (ד). אך לא תאוק שהיא מבטאת תיקון רלטיביסטי מסדר $(V/c)^2$. כך Fizeau בדק נוסחה (47) חמישים שנה לפני שנוסחה ע"י אינשטיין.

ה. אפקט דופלר היחסותי

גל מסוג כלשהו נפלט ב $t'=0$ מהנקודה $x'=0$ ומתקדם לאורך ציר x. כעבור מספר מסוים N של אורכי גל הוא נקלט ב x' בזמן t'. צופה במערכת הראשונה רואה הגל נפלט ב $t=0$ מ $x=0$ ונקלט, גם לאחר N אורכי גל, ב x בזמן t. שנוי הפאזה של הגל במשך מעופו, ϕ, חייב להיות שווה לשניהם כי מדובר באותו מספר מחזורים. לכן בהכרח, אם הגל הוא הרמוני,

$$(52) \qquad \phi = k'x' - \omega' t' = kx - \omega t$$

כאן k, k' מסמלים מספר הגל ו ω, ω' התדירות הזוויתית, ויתכן שהכמויות שונות בשתי המערכות.

נציב ב (52) את (41) ונקבל אחרי סדור מחדש

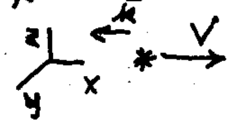
$$\gamma(k' + \omega' V/c^2)\,x - \gamma(\omega' + Vk')\,t = kx - \omega t \tag{53}$$

אפשר לקחת x ו-t שקולים תלויים. כי לא רק שאפשר למדוד הפזה בנקודה הסופית, אפשר למדוד אותה בנקודת ביניים בכל זמן שמעוניין ונדרש להיות התאמה בין המערכות על עקבה. לכן

$$k = \gamma(k' + V\omega'/c^2)$$
$$\omega = \gamma(\omega' + Vk') \tag{54}$$

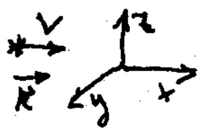
אם נסתכל על גל שקיה של תדירות ω' במערכת השנייה, והגל מגיע אלינו, במערכת הראשונה, ממקור המתרחק מאיתנו, הרי שאנו מבחינים בתדירות מופחתת

$$\omega = \gamma(\omega' - |Vk'|) \tag{55}$$



ואם הגל מגיע משמאלנו (מקור מתקרב אלינו) הרי ש

(56)



$$\omega = \gamma(\omega' + |Vk'|)$$

אם מדובר בגלי אור, $\omega' = ck'$, ולכן

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 \mp V/c}{1 \pm V/c}} \tag{57}$$

(סימן עליון - מקור מתרחק. סימן תחתון מקור מתקרב). יש לנו כאן אפקט דופלר - השינוי תדירות האור כתוצאה מתנועה יחסית בין מקור וצופה. בגבול של מהירות יחסית נמוכה

$$\omega = \omega'(1 \mp V/c) + O(V^2/c^2) \tag{58}$$

זה נקרא אפקט דופלר מסדר ראשון. זה היה ידוע ובדוק לפני הרלטיביות. הוא בעצם לא כולל הפקטור γ ב-(55) או ב (56). פקטור זה בא מדילטציית זמן.

אפקט דופלר מסדר ראשון משמש למדידת מהירות רדיאליות באסטרונומיה, בחלל, ובאלקטרוניקה וקוסמולוגיה. התיקון מסדר שני של (58)

$$\Delta\omega^{(2)} = \tfrac{1}{2}\omega'(V/c)^2 \tag{59}$$

נקרא: אפקט דופלר מסדר שני, ובו נבדק לרלטיביות ?,

Ives and Stilwell ב-1938 ו-Turner ו-Hill בנסוי שבספר הצבכע.

נציין שאילו הגל היה נע גם בכוון y ו- z היינו צריכים לכתוב הפזה

(60) $$\phi = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$$

הנוסחה (34) היא רלבנטית ל- k_x, ω כאשר ונזכר ש $k_y = k_y'$ ו $k_z = k_z'$. לכן אם נגזור ההפוך של הטרנספורמציה נוכל לכתוב

(61)
$$k_x' = \gamma\left(k_x - V\omega/c^2\right)$$
$$k_y' = k_y$$
$$k_z' = k_z$$
$$\omega' = \gamma\left(\omega - V k_x\right)$$

יש לעמוד על ההבדל בין (61) ל- (34). הוא נעוץ בהבדל שבין רכיבים של וקטור קווריאנטי או אנטיקווריאנטי.

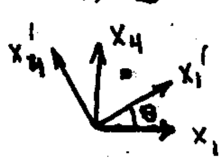
יש לשים לב שכאשר מקור האור נע ניצב לקו מעקב האור, שאז $k_x = 0$,

(62) $$\omega = \gamma^{-1}\omega'$$

זה נקרא אפקט דופלר הרוחבי, וכולו נובע מדילטציות הזמן.

ט. גיאומטרית מינקובסקי

טרנספורמציה (41) דומה לסבוב אוקלידי 4- ממדי. שם, עם הקואורדינטות x_1, x_2, x_3, x_4 סבוב זה הנמצא במישור 23 הינו



(63)
$$x_1' = x_1\cos\theta + x_4\sin\theta$$
$$x_4' = -x_1\sin\theta + x_4\cos\theta$$

כאשר θ הוא זווית הסבוב. אבל יש הבדל. הסבוב משאיר הכמות

(64) $$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

בלי שנוי. בהתאם לכך המרחק האוקלידי בין שתי נקודות מוגדר לפי

(65) $$\Delta s^2 = (\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2 + (\bar{x}_3 - x_3)^2 + (\bar{x}_4 - x_4)^2$$

או בגירסה האינפיניטסימלית

(66) $$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

גם אינברינטי.
לעומת זאת טרנספורמציות לורנץ משאירות

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{67}$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2 \tag{68}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \tag{69}$$

אינברינטים. לדוגמה

$$(70)\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)^2$$

$$= \underbrace{\gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}_{1} x^2 + y^2 + z^2 - \underbrace{\gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}_{1} c^2t^2$$

$$\cancel{+ 2\gamma^2 c^2 \frac{V}{c^2} xt} \cancel{- 2\gamma^2 V xt}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

הכמויות r^2, Δs^2, ds^2 הן דוגמאות של סקלרי לורנץ או אינברינטים לורנץ. ה-ds^2 נקרא האינטרוול בין שתי נקודות קרובות. אפשר לקרא ל-s^2 האינטרוול בין כל שתי נקודות.

העובדה שבטרנספורמציות לורנץ מופיע $\sqrt{1-V^2/c^2}$ שאוסרת עלינו להתיחס למהירות יחסית מעל ל-c, יש לה השלכה מידית למשמעות ds^2, או Δs^2. ניקח שתי מאורעות עם $\Delta s^2<0$. נבחר ציר המערכת לורנץ הבסיסית כך ש

$$\Delta y = 0, \quad \Delta z = 0, \quad \Delta x \neq 0 \quad \Delta t \neq 0 \tag{71}$$

כעת נעשה טרנספורמציות לורנץ למערכת שנעה עם מהירות

$$V = \Delta x / \Delta t \tag{72}$$

ה-V יוצאת קטנה מ c כי $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 < 0$. לפי (41)

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = 0 \tag{73}$$

כלומר ישנה מערכת בה שתי מאורעות עם $\Delta s^2<0$ הן באותו מקום. ולפי (41)

$$\Delta t' = \left(\Delta t - \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta x}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2/c^2} \tag{74}$$

כלומר

$$\Delta t' = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2} \tag{75}$$

כלומר, האינטרוול בין שתי מאורעות מודד הזמן ביניהן במערכת בה שתיהן נראות באותו מקום.

כל זה נכון גם לגבי ds^2. אם כן נחשוב על קו העולם (world line) של חלקיק, כלומר מסלולו במרחב-הזמן. ds^2 בגלל האינטרוול האינפיניטסימלי בין שתי מאורעות סמוכות של החלקיק. אם $ds^2<0$, התרגיל הקודם מראה לנו שקיימת מערכת לורנץ הנעה יחד עם החלקיק (לפחות בה בשניה), ופרק הזמן בין המאורעות, הנקרא פרק זמן עצמי, הוא

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} \tag{76}$$

זמן עצמי - המתקבל כך מהאינטגרל לאורך קו העולם, הוא הזמן שמראה שעון הנע עם החלקיק, ולא משנה אם החלקיק מואץ - כי התרגיל נעשה עם מערכת לורנץ הנעה עם החלקיק רגעית - בתנאי שהשעון לא מושפע פיזית מכוחות התאוצה. בקיצור, התאוצה לא משפיעה על הקינמטיקה. מסלול עם $ds^2<0$ נקרא קו עולמו דמוי זמן.

בניגוד לחלקיק שהזכרנו, פוטון - חלקיק אור - נע במהירות האור ולכן מאורעות על קו העולם של פוטון מקיימות (השווה עם (34))

$$ds^2=0,\ \Delta s^2=0 \tag{77}$$

האינטרוול עבור פוטון או אור תמיד אפס. אומרים שקו עולמו כזה הוא נול. ברור שאילו היינו יכולים להצמיד שעון לפוטון, הזמן העצמי שהיה מראה לא היה מתקדם כלל. ברור שאין מערכת מנוחה לפוטון.

ניקח עתה שני מאורעות עם $\Delta s^2>0$. שום נוסח (71). אין אפשרות למצוא מערכת לורנץ בה המאורעות באותו מקום; ה-V הדרוש כדי לאפס $\Delta x'$ הוא גדול מ-c כי $\Delta s^2>0$, והוא לא מתיישב עם השורש ב-γ. לכן אומרים שה מאורעות הפרודות ע"י אינטרוול דמוי-מרחב. נעשה טרנספורמצית לורנץ עם

$$V = c^2\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{78}$$

אז מ (41)

$$\Delta t' = \Delta t\left(1 - c^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{1}{c^2}\right) = 0 \tag{79}$$

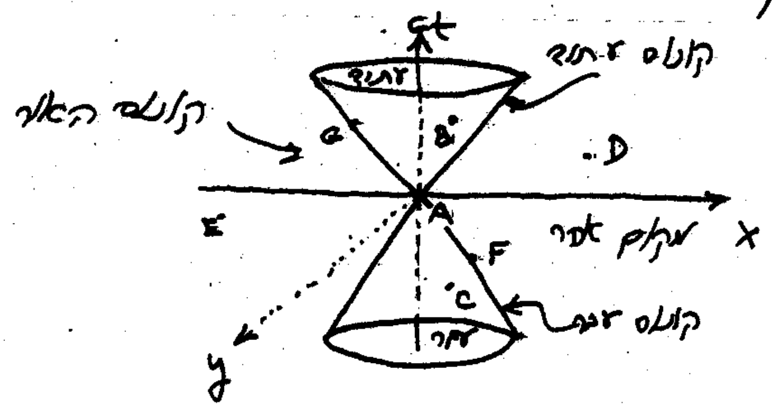
כלומר, ישנה מערכת לורנץ בה שתי המאורעות בו-זמנית. יתרה מזאת, אם נקח V גדול אפילו מ-(78) נקבל שסימון ה-"$\Delta t'$" הפוך מסימנו של Δt. כלומר מאורעות שבין דמויות מרחב כל כך רחוקות זו מזו ובאות להופיע בסדר זמני הפוך במערכות אחרות. זה מראה שמאורעות כאלה אין ביניהן קשר סיבתי.

יש להזכיר שעבור מאורעות המופרדות באינטרוול דמוי-זמן, אין אפשרות להפוך את סדר הזמני. זה מתאים עם (44)

(80) $$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - v\frac{\Delta x}{c^2}\right)$$

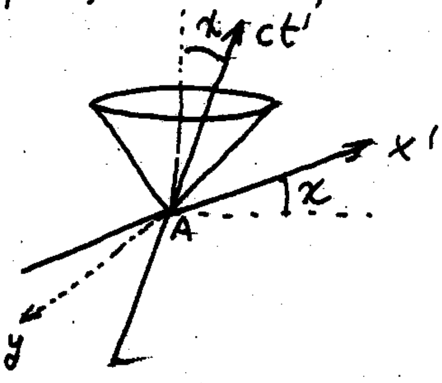
ו- $|\Delta x| < c|\Delta t|$ ו- $v<c$. לכן מאורעות כאלה עשויות להיות קשורות סיבתית.

מנקודת ראות של מאורע מסוים, A, ניתן לחלק את מרחב-הזמן בצורה הבאה



AB, AC דמוי זמן, B לעתיד, C לעבר וכל זה אינבריאנטי. AG, AF דמוי אור או נול, G לעתיד, F לעבר, גם זה אינבריאנטי. AD, AE דמוי-מרחב, אי אפשר לדבר על עבר או עתיד לגביהם. קונוס האור הוא האוסף של נקודות עם $\Delta s^2=0$ ביניהן.

ההגדרה למאורעות נשמרת תחת טרנספורמצית לורנץ, בפרט מקום קונוס האור אינו משתנה. כיוון ש- x ו- t של מאורע כן משתנים, הצירים יטו מהמקוריים לאחר הטרנספורמציה. למשל



הצירים נוטים בכיוונים הפוכים כי יש צורך שמקום קונוס האור לא ישתנה, כי בקונוס הוא נתיב קרני האור הנמצאים ב- A ו-, המקיימים $0=ds^2$ בכל מאורע.

חלקיק עם $ds^2>0$ נע כך שקו העולם שלו נמצא בתוך הקונוס העתידי. כמובן החלקיק נושא קונוס האור איתו ביחד עם החלקיק על מרחב הזמן של מאורעות סיבתיים.

קו עולם שנמצא מחוץ לקונוס האור יש לו בהכרח $ds^2<0$, ומשמעו שהחלקיק הנע מהר מהאור. קיום חלקיק כזה היה מוביל לבעיות עם סיבתיות, שכן קו העולם שלו

יכול לגשר בין מאורעות האלה קשורות סיבתית. אפשר להתגבר על חלק מהבעיות האלה. על כל פנים, אין עדות בעובדה על קיום טכיונים בטבע.

התרשימים בסעיף 18 מסכמים תכונות של גאומטריה מרחב-הזמן הנקראת גאומטריה Minkowski. התכונה העיקרית שלה היא המטריקה המשתמשת מצורת Δs^2 ב-(69), מטריקה שאינה חיובית מוגדרת.

ו. סקלרים, וקטורים, טנזורים

במרחב אוקלידי סקלר הוא כמות האינווריאנטית תחת כל סיבוב, באורך כל נקודות של $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ כפי שראינו, במרחב זמן מינקובסקי הכמויות Δs^2 ו-ds^2 אינווריאנטיות תחת טרנספורמציות לורנץ. לכן הם סקלרי לורנץ, או סתם סקלרים. גם מסת גוף (60) הוא סקלר. גם זמן העצמי של חלקיק הוא סקלר.

במרחב אוקלידי $\{x,y,z\}$ מהווה וקטור - יש שלישיה תכונות טרנספורמציה סיבובית, כמו (63). כל שלישיה רק טרנספורמציה מאותו סוג נקראת וקטור. באנלוגיה כל רביעיה כמו

$$\{x,y,z,t\}, \quad \{\Delta x,\Delta y,\Delta z,\Delta t\}, \quad \{dx,dy,dz,dt\} \tag{81}$$

שעושה טרנספורמציה לפי (41) נקראת 4-וקטור. כלומר, אם $\{v^0,v^1,v^2,v^3\}$ נחשב 4-וקטור במערכת אחרת

$$v^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^{3}\Lambda^{\mu}_{\nu}(V)\, v^{\nu}; \qquad v' = \Lambda v \tag{82}$$

כאשר Λ היא המטריצה

$$\Lambda(V) = \begin{array}{cc} & \nu \rightarrow \\ \mu\downarrow & \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c^2 & 0 & 0 \\ -\gamma V & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{83}$$

הרכיבים נלקחו מ-(41) או (46). גם במהירות אינה בכיוון x, המטריצה תהיה קצת אחרת. עבור $V=0$, Λ הופכת למטריצת יחידה. אפשר להבין ש-$\Lambda(-V)$ הינה המטריצה $\Lambda(V)^{-1}$ וגם ש

$$\Lambda(V_1)\,\Lambda(V_2) = \Lambda\left(\frac{V_1+V_2}{1+V_1V_2/c^2}\right) \tag{84}$$

הארגומנט בימין היא החיבור של V_1 ו-V_2 לפי (42). בפיזיקה מתאימה לביצוע טרנספורמציות לורנץ עם V_2

לאחר טרנספורמציה עם V, מכל זה נובע שטרנספורמציות
לורנץ מהוות חבורה. זה נכון גם כאשר המהירות
לא מקבילות. כאשר הן כן מקבילות נובע מ-
(84) שהחבורה היא אבלית. כאשר הן לא מקבילות
היא לא אבלית. אפשר לראות שתי טרנספורמציות
בכיוונים שונים בהרכבה של 2 טרנספורמציות
בכיוון אחד עם סיבוב תלת-ממדי. זה אומר
שבאופן טבעי יש חבורה גדולה יותר, גם
קוראים לה ח. לורנץ, הכוללת תת-חבורה
של סיבוב, ותת-חבורה של boosts (שינוי מהירות).

העובדה ש ΔS^2 או ds^2 אינווריאנטים אומרת
שמווקטורים-4 אפשר ליצור סקלרים באנלוגיה
ל-(67)-(69) כל וקטור v^μ,

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - c^2 (v^0)^2 = \text{סקלר} \tag{85}$$

או באופן קומפקטי

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \text{סקלר} \tag{86}$$

כאשר

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{array}{cc} \nu \rightarrow & \\ \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mu \downarrow \end{array} \tag{87}$$

נקראת מטריקת לורנץ. היא האנלוגית למטריקה g_{ij}
שמשתמשים בה כדי ליצור אלמנט האורך
בקואורדינטות עקומות בגאומטריה אוקלידית,
למשל, בקואורדינטות גליליות

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad x^1 = \rho \quad x^2 = z \quad x^3 = \phi \tag{88}$$

$$g_{ij} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

5

ההפוך של $\eta_{\mu\nu}$ הוא גם אלכסוני. מקובל לרשום אותה $\eta^{\alpha\beta}$
וזה כדי לעבוד קונסיסטנטי עם הכלל (ראה (82)) שאומר
אינדקסים שמסוכמים צריך מופיע פעם למעלה ופעם למטה
אכן יכן

$$\sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^{\alpha} = \text{Kronecker דלתא} \tag{90}$$

מבנו שלת

$$(91) \qquad \eta^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \nu \rightarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mu \downarrow \end{array}$$

בעזרת הגדרות אלו קל לראות ש

$$(92) \qquad \sum_{\nu\alpha} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v/c^2 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הדרך הקלה בזה לבצע המכפלה המטריצונית $\eta^{-1}\Lambda\eta$ כאשר η^{-1} הפוך ההפוכה של η. השוואה עם (83) מראה שקבלנו $\Lambda(-v)$ שהוא Λ^{-1}, אבל עם שני האינדקסים מחליפים (טורים ושורות מתחלפים). במשוואה זה נראה כך:

$$(93) \qquad \sum_{\nu\alpha} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\alpha = (\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu = (\Lambda(-v))^\beta{}_\mu$$

מקובל להשתמש בהפעלה

$$(94) \qquad \sum_\nu \eta_{\mu\nu} \cdot^{\nu\cdots}$$

כמשמעות

כהורדת האינדקס העליון ν ו

$$(95) \qquad \sum_\beta \eta^{\alpha\beta} \cdot_{\beta\cdots}$$

כהעלאת באינדקס התחתון β. המשוואה (93) אומרת שהעלאת והורדת האינדקסים על Λ נותן המחלף של ההפך של Λ.

כעת נחזור לחלק הטרנספורמציה (61) שבעל שונה מ (41). בואו רק דוגמה אחת של הטרנספורמציה תחת לורנץ של 4-גרדיינט של סקלר. נגדיר ש ϕ פונקציה סקלרית של ה x^μ תחת הטרנספורמציה

$$(96) \qquad x^\nu = \sum_\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x'^\mu ; \quad x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

גרדיינט של עובר לפי

$$(97) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} = \sum_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}$$

אפשר לרשום זה בצורה המטריצית (הסימן ~ פירושו משוחלף)

(98) $$\widetilde{\partial\phi/\partial x'} = \widetilde{\partial\phi/\partial x}\,\Lambda^{-1}$$

כדוגמה נקח הפזה ϕ מסעיף 8 ברור ש

(99) $$\begin{pmatrix} -\omega \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}$$

ולפי (98)

(100) $$(-\omega', k_x', k_y', k_z') = (-\omega, k_x, k_y, k_z)\begin{pmatrix} \gamma & \gamma v/c^2 & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\gamma(-\omega + v k_x),\ \gamma(-\omega v/c^2 + k_x),\ k_y,\ k_z\right)$$

וזה בדיוק (61). רביעית ערכים כמו (99) שחוק הטרנספורמציה שלה הוא זה של 4-גרדיאנט נקראת "וקטור קוברינטי", ובניגוד 4-וקטור כמו x^μ נקרא "קונטרווריאנטי".

ישנו קשר הדוק בין שני הסוגים של 4-וקטורים. בחוק הטרנספורמציה של וקטור קוברינטי, נסמן אותו g_μ;

(101) $$g'_\mu = \sum_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, g_\nu$$

נציב מ (93)

(102) $$g'_\mu = \sum_{\alpha\beta\nu} \eta_{\mu\alpha}\,\eta^{\nu\beta}\,\Lambda^\alpha{}_\beta\, g_\nu = \sum_\alpha \eta_{\mu\alpha} \sum_\beta \Lambda^\alpha{}_\beta \sum_\nu \eta^{\beta\nu} g_\nu$$

לכן טרנספורמציה g_ν שקולה לסדר של 3 פעולות. ראשית מעלים האינדקס (התחתון) שלו - לאחר מכן מבצעים טרנספורמציה כרגיל לוקטור קונטרווריאנטי, ולבסוף מורידים שוב האינדקס שנוצר חדש לקבל g'_μ. זה מראה שבדרך קונספטואלית אפשר לעשות מווקטור קוברינטי וקטור קונטרווריאנטי ולהיפך. זה לא בא בסתירה עם טרנספורמציה שונה לגמרי. לכן מדובר כאן במשהו אחד: בתורת היחסות הכללית יש צורה קוברינטית וצורה קונטרווריאנטית מתמטית כן מבדילים בין וקטור קוברינטי - רק מורידים להבנה במרחבים עקומים.

הכמות $\sum_\mu v^\mu g_\mu$ נקרא הצמצום של וקטור קווריאנטי עם וקטור קונטרווריאנטי. ראה (84) ו- (101)

$$(103)\quad \sum_\mu v'^\mu g'_\mu = \sum_{\mu\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu \, v^\alpha g_\beta$$

הסכום על $\Lambda\Lambda^{-1}$ נותן δ^β_α ולכן

$$(104)\quad \sum_\mu v'^\mu g'_\mu = \sum_\beta v^\beta g_\beta$$

(6) ונצא שהצמצום הוא סקלר. כדוגמה נקח הדיפרנציאל של פונקציה סקלרית f.

$$(105)\quad df = \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \sum_\mu f_{,\mu} dx^\mu$$

זהו צמצום של וקטור קונטרווריאנטי dx^μ עם וקטור קווריאנטי $f_{,\mu}$ ולכן חייב להיות סקלר. ואכן הפרש של סקלר בשתי נקודות שונות חייב להיות סקלר.

אם יש לנו שני וקטורים קונטרווריאנטים u^α ו- v^α אפשר ליצור וקטור קווריאנטי כך

$$(106)\quad u_\alpha = \sum_\nu \eta_{\alpha\beta} u^\beta$$

ולאחר מכן הסקלר

$$(107)\quad \sum_\alpha v^\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta} u^\beta v^\alpha$$

זה מראה שצמצום שני וקטורים קונטרווריאנטים לתוך המטריקה נותן סקלר (בתנאי שכל האינדקסים סוכמו). בדומה,

$$(108)\quad \sum_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

הצמצום של שני וקטורים קווריאנטים עם הפוך המטריקה הוא גם סקלר.

אובייקט מהצורה $u^\alpha v^\beta$ (16 רכיבים) עובר תחת טרנספורמציות לורנץ לפי

$$(109)\quad u'^\alpha v'^\beta = \sum_{\mu\nu} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, u^\mu v^\nu$$

כל אובייקט בעל 16 רכיבים, אפילו אם לא בנוי כמכפלה, כל עוד הוא עובר טרנספורמציה בדומה ל (109) נקרא טנזור קונטרווריאנטי מסדר שני (עם רק שני אינדקסים). בדומה ל $u_\alpha v_\beta$ אפשר להגדיר טנזורים קווריאנטים

מסדר שני (שני אינדקסים) וגם טנזורים מעורבים כמו $Q^\alpha{}_\beta$ שעובר כמו $v^\alpha u_\beta$. ואפשר להמשיך לבנות טנזורים מכל סדר ועם כל קומבינציה של אינדקסים עליונים ותחתונים.

ניתן לצמצם אינדקס עליון ותחתון. למשל

$$\sum_\alpha Q^\alpha{}_{\beta\gamma\alpha\mu\nu} \equiv S_{\beta\gamma\mu\nu} \qquad (110)$$

בדיוק בדומה ל (103)-(104) ניתן להראות ש S מתנהג כמו טנזור קווריאנטי מסדר רביעי לכל דבר.

המטריקה עצמה היא טנזור מסדר שני שיש לה אותם רכיבים בכל מערכת לורנץ. כי נניח שאין $\eta_{\mu\nu}$ טנזור. אז האובייקט

$$\eta_{\mu\nu} v^\alpha \qquad (111)$$

(v^α וקטור קונטרווריאנטי) אינו טנזור, והצמצום של אינדקסים α ו- ν לא מוביל לוקטור קווריאנטי. אך ראינו שאכן

$$\sum_\nu \eta_{\mu\nu} v^\nu \qquad (112)$$

הוא כן וקטור קווריאנטי, v_μ. לכן $\eta_{\mu\nu}$ הוא טנזור. כמו כן $\eta^{\mu\nu}$ טנזור קונטרווריאנטי. והצמצום (ראה (90))

$$\sum_\nu \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha \qquad (113)$$

שנותן הדלטה של קרונקר הוא טנזור מעורב. המטריקה רכיביה אותם רכיבים בכל מערכת כי הרי האינטרוול שאפשר לכתוב אותו (כאמור (86) ו-(69))

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (114)$$

יש לו אותה צורה (אותם מקדמים ל dx^2, dy^2 ...) בכל מערכת. כמו כן ל $\eta^{\mu\nu}$ ו- δ_μ^α אותם רכיבים בכל מערכת.

גרדיינט של טנזור הוא טנזור מסדר קווריאנטי אחד יותר גבוה, וזה משום ש

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu\prime}} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu\prime}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \sum_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \qquad (115)$$

לכן אם נפעיל שני האגפים כאן על שני האגפים של

$$Q'^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}{}^\epsilon = \sum \Lambda \Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \Lambda Q\ldots \qquad (116)$$

נקבל חוק טרנספורמציה טנזורי נכון ל $Q'^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}{}^\epsilon{}_{,\mu}$.

הדיברגנץ של שדה וקטורי A^μ הינה סקלר. כי בפעם הכל $\partial_\mu A^\mu$ הוא טנזור מעורב, ואם נצמצם שני האינדקסים לפי הדוגמה (104) נשאר בהפרח עם סקלר. כיוון שזה רק האופרטור

$$\Box = \sum_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{117}$$

(d'Alembertian) הוא אופרטור סקלרי (הוא הדיברגנץ של הגרדיאנט). כאשר הוא פועל על סקלר הוא נותן סקלר, וכאשר הוא פועל על טנזור הוא נותן טנזור מאותו סוג.

יא. השימוש של טנזורים בפיסיקה יחסותית

ראשית כל נפעיל מוסכמת הסכום של איינשטיין. כל פעם שיש סכום על אינדקס (צמד עליון-תחתון) שמופיעים במכפלה באותה כמות אחת, משמיטים סימן הסכום Σ. אם יש צמד אינדקסים כאלה אך אין סכום עליהם, יש לציין זאת במפורש.

עקרון היחסות אומר שחוקי הפיסיקה יהיו בעלי אותה צורה בכל מערכת לורנץ. הלכה למעשה דואגים לכך ע"י כתיבת המשוואות כמשוואות בין אובייקטים שתכונות הטרנספורמציות לורנץ שלהם מוגדרות, למשל

$$T_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}, \quad g_\mu = h_\mu, \quad F = f \tag{118}$$

כאשר F, f סקלרים, g_μ, h_μ וקטורים קוברינטים, $T_{\mu\nu}$ ו- $W_{\mu\nu}$ טנזורים עם שני אינדקסים קוברינטים. הסיבה שזה עובד היא משפט טריוויאלי שאומר ששני טנזורים (כולל וקטורים כמקרה מיוחד) מאותו סוג (כלומר מבנה של אינדקסים) שרכיביהם המתאימים שווים במערכת לורנץ אחת, יהיו שווים רכיבם בכל מערכת לורנץ. ולכן משוואות מהצורה (118) אם הן נכונות במערכת לורנץ אחת, תהיינה נכונות בכולן. במקרה שהמשוואה היא בין סקלרים, כל הנאמר נכון בדרך טריוויאלית.

כאשר תאוריה לא ניתנת לכתיבה כמשוואות בין טנזורים מאותו סוג, התאוריה לא נכונה בחלק ממערכות לורנץ ולכן היא נפסלת, כיום, מבחינת אמינות פיסיקלית. ← 7

יב. המכניקה היחסותית של חלקיק

חוק השני של ניוטון בצורה הכללית

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec f \qquad (119)$$

אינה בעלת אותה צורה בכל מערכות ייחוס: $\vec p$ הוא לא 4-וקטור, $\vec f$ הוא לא 4-וקטור, t שונה ממערכת למערכת. לכן (119) אינו החוק הנכון. אך אין להתעלם מהעובדה שבנסיבות לא-יחסותיות (119) מתאר המציאות באופן מדויק. מה שמשותף לכל הנסיבות האלה הוא שמהירות הגופים במערכת המעבדה נמוכות לעומת c. המסקנה היא שהחוק הנכון של הדינמיקה מתקרב ל-(119) כאשר מהירות החלקיק מתקרבת לאפס (עקרון התאמה).

הכללה טבעית של (119) שכן יש לה צורה קווריאנטית (אותה צורה בכל מערכת) היא

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \qquad (120)$$

כאשר p^μ הוא 4-וקטור (הכללה של $\vec p$), τ זה זמן עצמי של החלקיק, ו-f^μ הוא 4-וקטור, הכללה של מושג הכח. המועמד הטבעי ל-4-תנע הוא

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (121)$$

שהוא 4-וקטור ברור. כעת לפי (76)

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{d\vec r^{\,2}}{c^2}} = \gamma^{-1}dt \qquad (122)$$

כאן γ בנוי מ-$\vec v$ שהוא $d\vec r/dt$. לכן

$$p^\mu = (m\gamma,\ m\gamma\vec v) \qquad (123)$$

ונציב ב-(120) שנקבל לשתי משוואות

$$\gamma\frac{d}{dt}(m\gamma\vec v) = \vec f \qquad (124)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}(m\gamma) = f^0 \qquad (125)$$

חשבון מראה ש

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\vec v\cdot d\vec v/dt \qquad (126)$$

כך שאגף שמאל של (125) נעלם כאשר $\vec v\to 0$, ונציב ש-f^0 מתאפסת ב-$\vec v\to 0$ או במערכת המנוחה הרגעית של החלקיק. בדרך זו (121) הקונסיסטנטית עם העובדות הלא-יחסותיות.