4. גלים בזורמים

א. מבוא

כמו כל תווך, זורם יכול להוביל גלים. תכונות הגלים, מהירותם, נפיצה, דעיכה וכו', נגזרות מן תכונות הזורם, והדינמיקה של הגלים אינה מנותקת ממשוואות התנועה של הזורם.

ישנם גלים על פני זורם, גלים בגוף זורם, גלים תלושים, גלים הלמים, גלי הלם וכו'. כיון נעסוק בכמה דוגמאות. ראשית כל נחקור גלי כובד או גלי שטח בנוזלים, הכבידה, שהפיזיקה שלהם נגזרת בעיקר מתנאי הגבול. אחר כך נחקור פתרונות מדויקים של משוואות ההידרו-דינמיקה שבורות גלים להם. פתרונות אלה נדירים, ומתקבלים רק בתנאי סימטריה. כדי להבין גלים בהקשר כללי נשתמש באופן שיטתי בקירוב הליניארי להידרודינמיקה.

ב. גלי שטח

אלה נקראים גם גלי כבידה ומתרחשים רק בשכבה דקה סמוך לפני הזורם הנתון בשדה כבידה. הצורה הפשוטה של גלים אלה מופיעה בזורם שהמימדים (התחתית) שלו רחוקים (עמוקה) מאוד. במקרה כזה יש צורך להתמודד עם תנאי גבול רק על פני הזורם.

בגלל שטח פני הזורם עולים ויורדים בצורה גלית כאשר רוב הזורם במצב הידרוסטטי. תהיה a האמפליטודה של התנודה ו λ אורך הגל הטיפוסי. האיבר במשוואת אוילר $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ והיה מסדר a^2/τ. נכתוב $\vec{v}\sim a/\tau$ כאשר τ הוא זמן מחזור הגל. אז

$$|\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}| \sim \frac{1}{\lambda}(a/\tau)^2$$

(4.1) $$\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right| \sim \frac{a}{\tau^2}$$

אנו רואים שעבור גל עם $\lambda \gg a$ ניתן להזניח את איבר ה $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ במשוואת אוילר. בנוסף לכך $\lambda/\tau \gg a/\tau \sim v$; כוון ש λ/τ הנו מסדר מהירות הגל נראה סביר לקחת הזורם כבלתי דחיס. נזניח אפקטים של צמיגות. אזי

(4.2) $$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}(p/\rho) - \vec{\nabla}\phi_N$$

מכאן נובע ש $\vec{v}$ אינו תלוי בזמן. על כן נוכל להצטמצם לזרימה פוטנציאלית. ולכתוב $\nabla\phi = \vec{v}$. אז משוואה (4.2) הופכת ל

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + p/\rho + \phi_N\right) = 0 \qquad (4.3)$$

הכמות בסוגריים הוא אם כן פונקציה $f(t)$. אפשר לאפס פונקציה זו ע"י הוספת פונקציה של זמן מתאימה ל ϕ כמו בעמ' (23) אז

$$p = -\rho g z - \rho\,\partial\phi/\partial t \qquad (4.4)$$

זו כללית. על פני הזורם $z = \zeta(x,y,t)$ אנו מצפים ש $p = p_A$ שהוא קבוע, ולכן (אחרי פקטור ה ρ)

$$0 = g\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta} \qquad (4.5)$$

אבל $\partial\zeta/\partial t$ מסמל v_z על פני הזורם, שאפשר גם לכתוב כ $\partial\phi/\partial z$. לכן

$$\left(g\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=\zeta} = 0 \qquad (4.6)$$

זוהי המשוואה הרצויה. אפשר לקחת אותה ב $z=0$.

גל מישורי מהצורה $\phi = F(x-Vt)$ אינו מקיים משוואה זו. אין לנו סיבה לצפות מודולציה בכוון y, אבל אולי ישנה תלות ϕ ב z. אז ננסה (V הינו מהירות גל קבועה)

$$\phi = f(z)\,F(x-Vt) \qquad (4.7)$$

מהצבה מקבלים

$$g\frac{f'}{f}\Big|_{z=0} + V^2\frac{F''}{F} = 0 \qquad (4.8)$$

ומכאן מסיקים ש-

$$k \equiv \frac{f'}{f}\Big|_{z=0} \qquad \frac{F''}{F} = -\frac{gk}{V^2} \qquad (4.9)$$

הפתרון הוא

(4.10) $$F = \underset{\text{קבוע}}{A} \sin\left[\sqrt{\frac{gk}{V^2}}\,(x - Vt)\right]$$

בגלל שהזורם נחשב אי-דחוס, $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ אז

(4.11) $$\Delta\phi = 0$$

נציב המשוו' (4.7) כאן ונקבל

(4.12) $$\left(f'' - \frac{gk}{V^2} f\right) A \sin\left[\sqrt{\frac{gk}{V^2}}\,(x - Vt)\right] = 0$$

המקדם צריך להתאפס וזה נותן לנו (אקספוננט שלילי לא טוב עבור $z \to -\infty$)

(4.13) $$f = e^{\sqrt{\frac{gk}{V^2}}\, z}$$

אין צורך למקדם כי הוא נבלע בתוך A. השוואה של ה-f כאן עם הגדרת k ב-(4.9) מראה ש $k = g/V^2$ כך שנוכל לכתוב הפתרון (4.7) כך

(4.14) $$\phi = A e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

כאן ω משמשת כתדירות זוויתית ו-k כמספר גל. ברור ש

$$\omega^2 = gk$$

זאת נקראת הקשר הנפיצה, והוא קשר לא שגרתי.

<u>תרגיל 4.1</u> הראה שמהירות החבורה גדולה יותר עבור גלים ארוכים יותר – יש נפיצה.

<u>תרגיל 4.2</u> הראה שמהירות הזורם בתוך הגל מבצעת סיבוב במישור zx, ושגודלה הולך וקטן עם העומק.

<u>תרגיל 4.3</u> מהי משוואת פני הזורם $z = \zeta(x,y,t)$?

כאשר אורך הגל $2\pi/k$ לא קטן לעומת עומק הזורם תנאי הגבול בתחתית כן משפיעים כי ϕ כבר לא קטן שם. הטיפול אז הוא שונה במקצת.

ג. גלי נפח בעלי אמפליטודה קטנה

גלי נפח - גלי קול - הם תנודות של זורם בעלות אופי מתפשט. נניח שבהתחלה הזורם במנוחה ובעל ρ ו- p קבועים*. אז מוכנסת הפרעה ב- ρ ו- p ואיתה שדה מהירות. כיצד יתנהגו שינויים בזורם? המקרה הפשוט ביותר הוא כאשר ההפרעות ממצב המנוחה של מנוחה, $\delta\rho$, δp ו- $\vec{v}$ הינן קטנות. זה אומר

$$\delta\rho \ll \rho_0 \qquad p = p_0 + \delta p \qquad \rho = \rho_0 + \delta\rho \tag{4.16}$$
$$\delta p \ll p_0$$

וכמו כן ש $\vec{v}$ קטנה מספיק שהאיבר $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ במשוואת אוילר זניח לעומת איברים אחרים במשוואה. בנוסחאות מופיעים $\delta\rho$, δp ו- $\vec{v}$ באיברים מסדר ראשון ומזניחים כל איבר מסדר שני שלהם כגון $\delta\rho\,\vec{v}$ או $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$. התהליך נקרא לינאריזציה, והוא מוביל לקירוב הפיסיקה.

במשוואת הרציפות

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\delta\rho = -\rho\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{4.17}$$

האיבר השני מסדר שני. משני האחרים אנו מקבלים המשוואה המקורבת (זרקנו $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\delta\rho$)

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \tag{4.18}$$

במשוואת אוילר

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p \tag{4.19}$$

האיברים מסדר ראשון הם

$$\rho_0\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\delta p \tag{4.20}$$

בזה שנקטנו במשוואת אוילר (4.19) הנחנו שאין חיכוך וזרימה איזנטרופית - זרימה אדיאבטית. זה אומר ש

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho \tag{4.21}$$

הכמות $(\partial p/\partial \rho)_s$ הוא קשורה עם דחיסות האדיאבטית. נחשב אותה בתנאים הראשונים p_0, ρ_0 כי δp, $\delta\rho$ הם כבר

---

* לכן בהכרח אין שדה כבידה

מסדר ראשון, כיוון שהתנודות האדיאבטיות הינן תלויות לגבי מצב חומר יציב, נקבל

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \qquad (4.22)$$

משוואה (4.20) הופכת ל

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla}\delta\rho \qquad (4.23)$$

המשוואות (4.18) ו- (4.23) הן משוואות ליניאריות מצומדות עבור המשתנים $\vec{v}$ ו- $\delta\rho$. נציב (4.18) בדיברגנס של (4.23) שהוא

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{\nabla}\cdot\vec{v}}{\partial t} = -c^2 \Delta\delta\rho \qquad (4.24)$$

ונקבל

$$\Delta\delta\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.25)$$

זאת משוואת גל. נחפש פתרון שבו $\delta\rho=\delta\rho(x,t)$ בלבד. המשוואה הופכת ל

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.26)$$

ויש לה פתרון כללי מהצורה

$$\delta\rho = f_R(x-ct) + f_L(x+ct) \qquad (4.27)$$

[כאשר f_R ו- f_L הן שתי פונקציות כלליות גזירות מסדר שני] כי

$$\frac{\partial^2 f_{R,L}}{\partial x^2} = f''_{R,L}\,; \qquad \frac{\partial^2 f_{R,L}}{\partial t^2} = c^2 f''_{R,L} \qquad (4.28)$$

לכן (4.27) מתאר גל משולב של צפיפות הנוסע ימינה במהירות c, ועוד גל כנגד הנוסע שמאלה באותה מהירות. הסופרפוזיציה של השנים היא גם פתרון כי (4.26) משוואה ליניארית. פתרון המתאר גל הנוסע בכיוון $\hat{n}$ הוא (f הוא פונקציה כללית גזירה)

$$\delta\rho = f(\hat{n}\cdot\vec{x} - ct) \qquad (4.29)$$

כי

$$\vec{\nabla}\delta\rho = \hat{n} f'\,; \qquad \Delta\delta\rho = \hat{n}\cdot\vec{\nabla} f = \underbrace{\hat{n}\cdot\hat{n}}_{1} f'' \qquad (4.30)$$

ולכן (4.28) מתקיימת. גם מ-(4.27) וגם מ-(4.29) ברור שגל הוא הפרעה של צפיפות המתפשטת במהירות c. לכן

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \qquad (4.31)$$

נקראת מהירות הקול בגז אידיאלי. יש לשים לב שגזרת ההפרעה במרחב משמרת אנטרופיה. זה קשור עם האידיאליות.

מקרה פרטי של $f(\xi)$ הוא $A\sin(\omega\xi/c)$ או $A\cos(\omega\xi/c)$
אם נגדיר $\vec{k} = \omega\hat{n}/c$ אז יש לנו הפתרונות המוכרים

$$\delta\rho = \begin{cases} A\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \\ A\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \end{cases} \qquad (4.32)$$

בנקודה מסוימת יש משתנה הרמוני עם תדירות ω, לכן קוראים לגל הרמוני או מונוכרומטי. $\vec{k}$ נקרא וקטור הגל. וידוע שכל פתרון של משוואה (4.29) הנו סופרפוזיציה של כל הגלים (4.32) עם כל ה-ω ו-$\hat{n}$ עם מקדמים מתאימים. לכן הפתרונות (4.32) הם הפתרונות הבסיסיים. לפעמים נוח לחבר את שניהם בצורה

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} = \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) + i\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \qquad (4.33)$$

ולהתייחס רק לחלק הממשי או המדומה בביטוי המתקבל ממנו.

לפי (4.21) ההפרעות בלחץ δp פרופורציונליות ל-$\delta\rho$. למשל לפתרון הראשון ב-(4.32) מקבלים

$$\delta p = Ac^2\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \qquad (4.34)$$

לכן גל הקול גם הפרעה ללחץ המתפשטת עם מהירות c. ומה קורה עם $\vec{v}$ בגל קול?

משוואה (4.26) מראה ש

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0 \qquad (4.35)$$

כלומר $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ תלוי רק במקום, ויש לו בדיוק הערך ההתחלתי. אם התחלנו בסטטיקה עם $\vec{v}=0$, לכן לתמיד ובכל מקום

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = 0 \qquad (4.36)$$

לכן

קול בתווך שקבענו כולל צרימה פוטנציאלית. נגזור (4.23) לפי t
ונציב ב- $\partial\rho/\partial t$ מתוך הגרדיינט של (4.18):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c^2 \rho_0 \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \qquad (4.37)$$

לאור הזהות הווקטורית

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v} \qquad (4.38)$$

והעובדה ש- $\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$ המשוואה הופכת ל

$$\Delta\vec{v} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.39)$$

כלומר כל רכיב $\vec{v}$ מקיים אותה משוואת גל כמו $\delta\rho$ ו- δp. הצרימה בגל קול גם היא מתפשטת במהירות c. הפתרון של (4.39) שנבחר חייב להיות מתואם לזה של (4.25). למשל, רק פה ב-(4.27) הולך הפתרון

$$\vec{v} = \hat{i}\frac{c}{\rho_0}\left[f_R(x-ct) - f_L(x+ct)\right] \qquad (4.40)$$

באותה מידה, ובמקום (4.29) הולך הפתרון

$$\vec{v} = \hat{n}\frac{c}{\rho_0} f(\hat{n}\cdot\vec{x} - ct) \qquad (4.41)$$

מ-(4.40) ו-(4.41) ברור שהמהירות של הזורם בגל קול תמיד באותו קו כמו התפשטות הגל. גלי קול בזורם הם גלים אורכיים או לונגיטודינליים. במיוחד מ-(4.41) ברור ש

$$\frac{|\vec{v}|}{c} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} \qquad (4.42)$$

הנחנו כאן ש $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$. זה אומר $c \gg |\vec{v}|$ וזאת המשמעות המקורית של הנחתנו ש- $\vec{v}$ היא קטנה.

ד. מהירות הקול

את c אפשר לחשב מ-(4.31) ומטבלה של תכונות תרמודינמיות של נוזל. אך מדובר בגז לא צפוף (גז אידיאלי) ניתן לעשות חשבון כללי.

נתחיל עם חוק הראשון (1.19)

$$du = T\,ds - p\,dV \tag{4.43}$$

ביחד עם הנוסחאות לגז אידיאלי (1.14) מונואטומי

$$p = \frac{\rho k T}{\mu} \tag{4.44}$$

ו-

$$u = \frac{3}{2}\frac{kT}{\mu} \tag{4.45}$$

בתהליך אדיאבטי $ds=0$. נציב שתי האחרונות ב (4.43) ונקבל (נזכור $V=1/\rho$)

$$\frac{3}{2}dT = -\rho T\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

או אחרי נקוי

$$\frac{3}{2}\frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} = 0 \tag{4.46}$$

עם אינטגרל

$$T\rho^{-2/3} = \text{const.} \tag{4.47}$$

כאשר שמים זה ב (4.44) מקבלים

$$p = K\rho^{5/3} \tag{4.48}$$

כאשר K קבוע התלוי בתנאי הגז.

כעת מ-(4.31) מקבלים לפי (4.44) נוסחת ניוטון-לפלס

$$c = \sqrt{\frac{5}{3}K\rho^{2/3}} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{kT}{\mu}} \tag{4.49}$$

לכן מהירות הקול תלויה רק בטמפרטורה ובמסת המולקולות. למשל עבור חמצן ($\mu = 4.68\times10^{-23}$ g) בטמפרטורה $300\,^\circ K$ $c = 3.65\times10^4\,\frac{cm}{s}$. ודוק מ(4.45) שהאנרגיה הקינטית הממוצעת למולקולה היא

$$\left\langle \frac{1}{2}\mu v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}kT \tag{4.50}$$

לכן יש לנו הקשר

$$c = \sqrt{\frac{5}{9}\langle v^2\rangle} \qquad (4.51)$$

כלומר c תמיד מסדר גודל מהירות הממוצעת של המולקולות.

תרגיל 4.4 נסח שיקול להצדיק השימוש בזרימה פוטנציאלית לתאור הזרימה בגל קול (עיין מסקנה 1.10 או משפט קלווין). מהי המשוואה עבור ϕ?

תרגיל 4.5 גלי קול בעלי תדירות ω קיימים בתוך קופסה מלבנית במימדים $a\times b\times c$. פתור המשוואה עבור ϕ ומצא הקשר בין ω ל- a,b,c.

תרגיל 4.6 מהו הפקטור המספרי בתוך השורש ב(4.49) לגז דו-אטומי?

ה. גלי רימן

ב-4.ג נסחנו משוואות לגלי קול בהנחה שההפרעות שהם עושים על הרקע קטנות. זה אומר שגלי קול רגילים הם בהכרח גלים בעלי אמפליטודה קטנה. במלים שונות, גם נוצרים גלים עם אמפליטודה גדולה, וכאן נפתח תורה אחת שמתאימה להם.

מצאנו למעלה באמפליטודה קטנה שהגלים נוסעים מבלי לשנות את הפרופיל של v או ρ או p בתוך הגל. נ"ל שכל אלה פונקציות של $x-ct$ עבור גל המתפשט ימינה במימד אחד, או פונקציות של $\hat{n}\cdot\vec{x}-ct$ עבור גל מישורי תלת-מימדי. ולכן ש- ρ, p, v הן כולן פונקציות אחת של השניה.

רימן נשא את ההגבלה של אמפליטודות קטנות וחיפש פתרונות גלים במימד אחד שבהם ρ, p, v פונקציות אחת של השניה. הקשר $p=p(\rho)$ מוצדק מהנחת האיזנטרופיות אבל לאמר ש- v פונקציה של ρ הוא הגבלה הקובעת הכללית שצריך מציאת פתרון.

במימד אחד יש רק v_x, נגזור. המשוואות הן

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad (4.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (4.53)$$

מכוון ש-v פונקציה של ρ ניתן לכתוב (4.52) כך:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (4.54)$$

כעת נזכר שלכל פונקציה $\rho(x,t)$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_t \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho \left(\frac{\partial t}{\partial \rho}\right)_x = -1 \qquad (4.55)$$

ולכן

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = -\frac{(\partial\rho/\partial t)_x}{(\partial\rho/\partial x)_t} = +\frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho\frac{dv}{d\rho} \qquad (4.56)$$

כלומר מהירות הנקודה בעלת בה המהירות היא $v(\rho)$ והצפיפות ρ.

בצורה דומה נוכל לכתוב (4.53) כך

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (4.57)$$

בדומה למעבר מ (4.54) ל (4.56) יש לנו עכשיו

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = -\frac{(\partial v/\partial t)_x}{(\partial v/\partial x)_t} = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} \qquad (4.58)$$

אבל כוון ש-$v=v(\rho)$ צריך ש

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho \qquad (4.59)$$

וזה אומר

$$\rho\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} \qquad (4.60)$$

אם p איזנטרופית נסיק ש $dp/d\rho = c^2$ (מהירות הקול
האדיאבטית) ולכן

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm\frac{c}{\rho} \qquad (4.61)$$

זה נותן לנו הקשר

$$v = \pm\int\frac{c(\rho)}{\rho}d\rho \qquad (4.62)$$

יש שני סימנים כי המהירות יכולה להתהפך.

עם זה אנו חוזרים ל (4.56) ורואים ש

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = v(\rho) \pm c(\rho) \qquad (4.63)$$

אפשר לפרש זאת כך: הצורה נעה במהירות $v(\rho)$ ועליו יש גל קול שנע שמאלה או ימינה במהירות $c(\rho)$. לכן מהירות נקודה בגל שבה ρ הוא הנתון $c \pm v$.

נוכיח עתה שהמהירות ב-ρ נתון עולה מונוטונית עם ρ. זה אומר שפרופיל הגל עובר עוות סינמטי. מ (4.56)

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = 2\frac{dv}{d\rho} + \rho\frac{d^2v}{d\rho^2} \qquad (4.64)$$

מתמקד בגל ההולך ימינה. לפי (4.61)

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = \frac{2c}{\rho} - \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{d(c\rho)}{d\rho} \qquad (4.65)$$

אבל לפי ההגדרה (4.31) של c, $\rho c = \rho\sqrt{dp/d\rho}$ במונחים של נפח לגרם $V = 1/\rho$,

$$\rho c = \rho\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{-\frac{dp}{dV}} \qquad (4.66)$$

ומכיוון ש

$$\frac{d}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{dV} \qquad (4.67)$$

הרי ש

$$\frac{d}{d\rho}(c\rho) = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2p/dV^2}{\sqrt{-dp/dV}} \qquad (4.68)$$

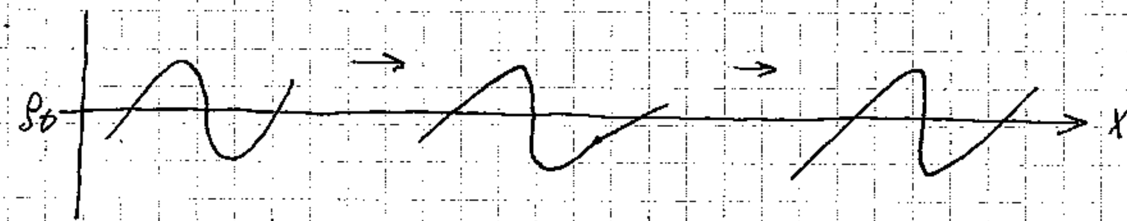
כאלה עובדה בדוקה (לפחות תוך טבע) שהדחיסות האדיאבטית $-\frac{dV}{dp}$ קטנה עם p. לכן

$$\frac{d^2p}{dV^2} = -\frac{\frac{d}{dV}\frac{dV}{dp}}{(dV/dp)^2} = +\left(\frac{dp}{dV}\right)^2\rho^2\frac{d}{d\rho}\frac{dV}{dp} = \left(\frac{dp}{dV}\right)^2\rho^2c^2\frac{d^2V}{dp^2} > 0 \qquad (4.69)$$

אם כן רואים ש $\frac{d}{d\rho}(c\rho) > 0$ או

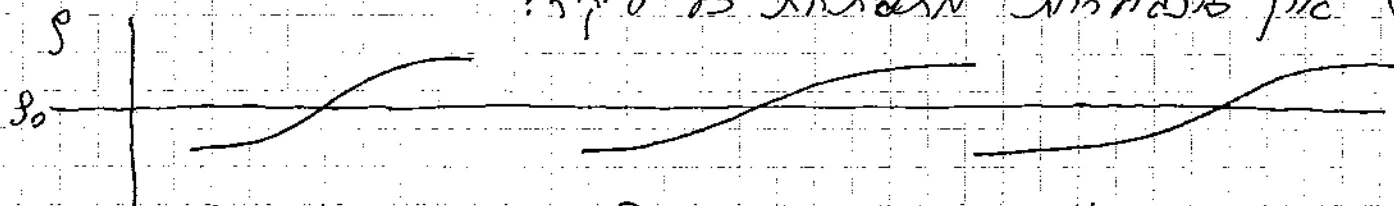
$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho > 0 \qquad (4.70)$$

לגבי גל הנוסע בכוון x חיובי יקרה דבר הבא:



רואים בתמונה השלישית הגל הופך רב ערכי (יותר מערך אחד של ρ מתאים לאותו x). ונראה שהגל מפתח סינגולריות. זה שונה ממה שהיינו מצפים מתורה הלינארית לפיה צורת הגל קבועה. במציאות בהתקרבה הגל למצב הסינגולרי נוצר גרדיינט חזק של מהירות שגורם לצמיגות "לעבוד" את פרופיל הגל כך שהסינגולריות לא ממש מופיעה.

בגל שעבורו ρ היא מונוטונית עולה עם x, והוא נע ימינה, אין סינגולריות מתפתחת כלל ועיקר:



נהיה יותר כמותיים עתה לגבי הפונקציות $\rho(v)$, $p(v)$ וכו'. נתמקד בגז אידיאלי. בסעיף ד' מצאנו מהירות הקול לגז מונואטומי. לגז אידיאלי כללי בצורה אדיאבטית

$$p = K\rho^{\gamma} \qquad \gamma > 1 \tag{4.71}$$

כאשר γ נקראת האינדקס האדיאבטי. במקום (4.49) יש לנו כאן

$$c = \sqrt{\gamma p/\rho} \tag{4.72}$$

משתי המשוואות מסיקים

$$c = \sqrt{\gamma K}\, \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \tag{4.73}$$

ולכן אפשר לאנטגרל (4.62):

$$v = \pm\sqrt{\gamma K}\int \rho^{\frac{\gamma-3}{2}}\, d\rho = \pm\frac{2\sqrt{\gamma K}}{\gamma-1}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) \tag{4.74}$$

$$= \pm\frac{2}{\gamma-1}\left(c - c_0\right)$$

כאשר אינדקס "0" מסמל הערך עבור $v=0$ (בהנחה שיש).

פותרים כדי לקבל

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} v \tag{4.75}$$

מ-(4.73) ואז

$$\rho = \left(\frac{c^2}{\gamma K}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{c_0^2}{\gamma K}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 \pm \frac{\gamma-1}{2}\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{4.76}$$

וכמובן

$$p = K\rho^\gamma = K\rho_0^\gamma \left(1 \pm \frac{\gamma-1}{2}\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \tag{4.77}$$

שים לב שעבור גל ההולך ימינה (סימן +) ישנה ההגבלה

$$v > -\frac{2c_0}{\gamma-1} \tag{4.78}$$

ועבור גל ההולך שמאלה

$$v < \frac{2c_0}{\gamma-1} \tag{4.79}$$

לפי (4.63) ו-(4.75)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = v \pm c = \pm c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \tag{4.80}$$

ולכן

$$x = \left(\pm c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v\right) t + f(v) \;; \quad f \text{ פונקציה כלשהי} \tag{4.81}$$

כך נותן לנו פרופיל הגל במפורש. פתרון כזה נקרא גל פשוט.

כאשר $f=0$ יש לנו זרימה דמותית. ז"א לפי (4.81) המהירות v היא פונקציה של x/t ולא של x ו-t בנפרד. לכן אין כל סקלת אורך או סקלת זמן מועדפת בבעיה. לכן הזרימה דמותית. לזרימה דמותית יש לה תכונות מיוחדות שנגלה. לאמיתו של דבר הן חורגות מן המודל של גז אידיאלי, ונכונות לכל זרימה איזנטרופית.

נגזור (4.81) לפי x ב-t קבוע (הכל עבור $f=0$):

$$1 = \frac{\gamma+1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t t \tag{4.82}$$

מכיון ש- $(\partial v/\partial x)_t > 0$ (אנו מנתחים $t>0$ כל הזמן). לפי (4.76)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_t = \pm \frac{\rho/c_0}{\underbrace{1 \pm \frac{\gamma-1}{2}\frac{v}{c_0}}_{>0}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t \qquad (4.83)$$

ולפי (4.77)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_t = \pm \frac{\gamma p/c_0}{1 \pm \frac{\gamma-1}{2}\frac{v}{c_0}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t \qquad (4.84)$$

ולכן ש- $(\partial \rho/\partial x)_t > 0$, $(\partial p/\partial x)_t > 0$ עבור "גל" המתפשט ימינה והפוך עבור "גל" הנוסע שמאלה. המונוטוניות לא מצדיקה את השם "גל" להפרעה.

אפשר עוד לפרט הרבה. מהן התלויות של v, ρ, p בזמן עבור כל אלמנט גז? לפי משוואות הרציפות

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x} < 0 \qquad (4.85)$$

לכן הצפיפות (וכמו כן הלחץ, שכן מאיזנטרופיות $dp/dt = c^2 d\rho/dt$) יורדים לאורך הזרימה. זרימה דמויית של גז אידיאלי היא אם כן גל התדלדלות (רֵרֶפַקְצִיָה).

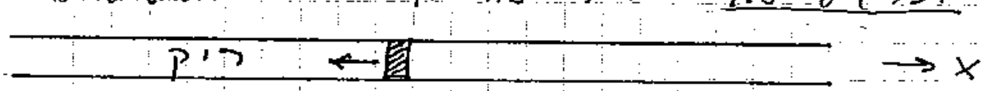
"גל רֵרֶפַקְצִיָה" אינו משתרע על כל המרחב. אפשר לראות מ-(4.81) שעבור $x\to\infty$ או $x\to-\infty$ ב-t נתון ה-v היה מגיע ל-∞ שלא אפשרי. אז הגל ממוקם.

<u>תרגיל 4.7</u> בזרימה דמויות חד-ממדית, כל הגדלים פונקציות רק של x/t. בלי להניח ש-p הוא חזקה של ρ הוכח ש

$$x/t = v + c \qquad (4.86)$$

$$v = \int \frac{c(\rho)}{\rho}\,d\rho \qquad (4.87)$$

<u>תרגיל 4.8</u> הבוכנה בצינור העגול באינסופי



מתחילה לנוע ב-$t=0$ לפי החוק $x = -at^2/2$ כאשר a קבוע. בצד שלעברו נעה הבוכנה אין כלום. בצד השני יש גז עם $p = K\rho^\gamma$. תאר שדה הזרימה ומומנט הבוכנה כפונקציה של זמן.

---

1. אנרגיה ותנע של גל קול

כאן אנו צריכים לגלוש מלינאריות. כמה אנרגיה ותנע נושא גל כזה? לפי (1.69) צפיפות האנרגיה בזרימה כללית היא

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 + \rho u \qquad (4.88)$$

נעשה הפיתוח (4.16) מלווין ב-

$$\rho u = \rho_0 u_0 + \delta\rho \left.\frac{\partial(\rho u)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} + \frac{1}{2}\delta\rho^2 \left.\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=\rho_0} + \dots \qquad (4.89)$$

אבל

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial\rho} = u + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} \qquad (4.90)$$

מהזהות

$$du = T\,ds + (p/\rho^2)\,d\rho \qquad (4.91)$$

ולמרות שכאן (בתנאים אדיאבטיים ראה (1.88))

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{p}{\rho^2}\,; \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial\rho} = u + \frac{p}{\rho} = h \qquad (4.92)$$

ולכן לפי (1.89) ו- (4.31)

$$\frac{\partial^2(\rho u)}{\partial\rho^2} = \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}c^2 \qquad (4.93)$$

עד כן לסדר $(\delta\rho)^2$ ו- v^2 הביטוי (4.88) הוא

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0 u_0 + h_0\,\delta\rho + \frac{1}{2}c_0^2\,\delta\rho^2/\rho_0 \qquad (4.94)$$

כאן הזנחנו איבר מסדר שלישי, $v^2\delta\rho$.

האיבר $\rho_0 u_0$ לא משתנה - הוא אנרגית הרקע ולכן לא שייך לגל. כמו כן $h_0\delta\rho$ הוא איבר אוסצילטורי המראה סימן חלופי וממוצעו לאפס. התרומה שלו לאנרגיה הכללית היא

$$\int h_0\,\delta\rho\,d^3x = h_0\,\delta M \qquad (4.95)$$

משמרת מסה, לכן נזרוק אותו. ולכן שצפיפות האנרגיה בקול (לתנודות קטנות) היא

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho_0 \vec{v}^2 + \frac{1}{2}c_0^2\,\delta\rho^2/\rho_0 \qquad (4.96)$$

לפי (4.40) ו (4.27) לגל חד-מימדי בכיוון אחד

$$|\vec{v}|/c_0 = \delta\rho/\rho_0 \qquad (4.98)$$

ולפי (4.42) אותו קשר טוב לגל מישורי כלשהו. עבור שני אלה, לכן,

$$\mathcal{E} = \rho_0 \vec{v}^2 \qquad (4.99)$$

זה הביטוי הרצוי לצפיפות אנרגיית הקול.

לגל כללי יותר כמו כדורי או גלילי כל זה לא עובד. אבל נוכל להשתמש במשפט הוויריאלי: במערכת מכנית שבה האנרגיה הקינטית היא קוואדרטית במהירויות, והאנרגיה הפוטנציאלית קוואדרטית בקואורדינטות, שתי האנרגיות שוות בממוצע על פני הזמן. ברור מ (4.96) שהאיבר הראשון הוא צפיפות אנרגיה קינטית והשני פוטנציאלית. לכן

$$\frac{1}{2}\rho_0 \int \overline{\vec{v}^2}\, d^3x = \frac{1}{2}(c_0^2/\rho_0) \int \overline{\delta\rho^2}\, d^3x \qquad (4.100)$$

לכן האנרגיה <u>הכוללת</u> בגל קול כללי הוא

$$E = \rho_0 \int \overline{\vec{v}^2}\, d^3x \quad \text{או} \quad E = c_0^2/\rho_0 \int \overline{\delta\rho^2}\, d^3x \qquad (4.101)$$

אמרנו שגל ליניארי פירושו $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$, ולכן באופן כללי מ (4.98) $v/c_0 \ll 1$. לכן ובדיוק ש

$$\mathcal{E} \ll \rho_0 c^2 \qquad (4.102)$$

בגז אידיאלי <u>צפיפות</u> אנרגיה התרמית הוא מסדר $\rho_0 c^2$ (ראה (4.51)). לכן אנרגיית גל קול קטנה בסקלת אנרגיות $\rho_0 u_0$ של הגז.

לפי (1.169) שטף האנרגיה הוא

$$\vec{J} = \rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + h\right) \qquad (4.103)$$

כמו שעשינו רק צפיפות האנרגיה נחשב השטף לסדר שני. ברור שיש לזרוק ה- $\frac{1}{2}\rho\vec{v}v^2$ שהוא מסדר שלישי. לכן

$$\vec{J} = \vec{v}\left(\rho_0 h_0 + \left.\frac{\partial(\rho h)}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0} \delta\rho\right) \qquad (4.104)$$

אבל לפי (4.92)

(4.105) $$\rho h = \rho u + p \qquad \frac{\partial(\rho h)}{\partial \rho} = h + \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

על כן

(4.106) $$\vec{J} = \underbrace{\rho_0 h_0 \vec{v} + h_0\, \delta\rho\, \vec{v}}_{\rho h_0 \vec{v}} + c_0^2\, \delta\rho\, \vec{v}$$

ברור שתרומת האנרגיה החוצה כתוצאה משני האיברים הראשונים תהיה

$$h_0 \int \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = h_0\, dM/dt$$

מהמשוואה רק (4.95) ברור שיש להשמיטם כדי להיות קונסיסטנטי עם מסקנתנו עבור צפיפות אנרגית הקול.
לכן

(4.107) $$\vec{J} = c_0^2\, \delta\rho\, \vec{v}$$

<u>תרגיל 4.9</u> הוכיח את משוואת הרציפות לאנרגית הקול

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

אישור נכונות צורה זו של $\vec{J}$ מתקבל ממשוואות הרציפות.
לגל מישורי יש לנו הקשר (4.98) ולכן

(4.108) $$\vec{J} = \rho_0 c_0 |\vec{v}|\, \vec{v} = \varepsilon\, c_0\, \hat{n}$$

כאשר הגדלו השני נובע מ (4.99) והגדרה $\hat{n} = \vec{v}/|\vec{v}|$ כלומר
שצפיפות אנרגית הקול הולך צפיפות כפול מהירות הקול
והולך בכוון המהירות של החלקיק, כלומר בכוון התפשטות הגל.
כל זה נשאר הגיוני, זה נכון רק לגל מישורי.
שטף התנע הוא (ראה (1.172))

(4.109) $$\overleftrightarrow{\Pi} = \rho \vec{v} \vec{v} + p \overleftrightarrow{I}$$

עד סדר שני במהירות קטנות

(4.110) $$\overleftrightarrow{\Pi} = \rho_0 \vec{v} \vec{v} + p_0 \overleftrightarrow{I} + \delta p\, \overleftrightarrow{I}$$

האיבר $p_0 \overleftrightarrow{I}$ הוא כולו של הריק. נצרך אותו. כדי לחשב δp

נזכור שבגל קול $c \gg v$ ולכן החלקיק נע הרבה פחות מאורך גל בזמן מחזור אחד. האורך הגל הינו סקלת האורך לשינויים בגל קול. לכן לפי דוגמא 10.1 הזרימה בגל קול חייבת להיות נטולת ערבוליות, מה שמצדיק שימוש ב

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \tag{4.111}$$

עבור זרימה פוטנציאלית התלויה בזמן תקפה משוואה (1.114)

$$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + h = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{4.112}$$

לקחנו כאן המקרה האיזנטרופי (לא מתאים לקחת הולכת חום שכן כל הפיזיקה של גל קול נמצאת ב- $\delta\rho$).

נצטרך לצרכנו להסתכל על גל לא אינסופי. לפני בוא הגל $\vec{v}=0$ ו $h=h_0$ ולכן $h_0=-\partial\phi/\partial t$. אותו דבר אחרי שהגל חלף. במילים אחרות ϕ לינארי בזמן עם מקדם $-h_0$. נגדיר

$$\tilde{\phi} = \phi + h_0 t \tag{4.113}$$

עם ערכים אפס אסימפטוטיים ולכן

$$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \delta h = -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} \tag{4.114}$$

כאשר $\delta h = h - h_0$. ברור ש $\tilde{\phi}$ עובר שינוי סופי בלבד ולכן הממוצע על זמן של $\partial\tilde{\phi}/\partial t$ הוא אפס. אם כן

$$\frac{1}{2}\overline{\vec{v}^2} + \overline{\delta h} = 0 \tag{4.115}$$

לפי (1.89) $\partial h/\partial p = 1/\rho$ ולכן נוכל לפתח δh ולקבל

$$\frac{1}{2}\overline{\vec{v}^2} + \frac{1}{\rho_0}\overline{\delta p} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\rho}\right)_{\rho_0}}_{-\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{\rho_0}}\overline{\delta p^2} + \cdots = 0 \tag{4.116}$$

אולם

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\rho_0}\delta\rho = c_0^2\,\delta\rho \tag{4.116א}$$

ולכן

$$\frac{1}{2}\overline{\vec{v}^2} + \frac{1}{\rho_0}\overline{\delta p} - \frac{1}{2}\frac{c_0^2}{\rho_0^2}\overline{\delta\rho^2} = 0 \tag{4.117}$$

אבל אנו יודעים ש $\delta\rho/\rho_0 = |\vec{v}|/c_0$ בגל מישורי (קרוב לגל
לגל הסופי שלנו). לכן (4.117) מראה <u>שעד סדר שני</u>

$$\overline{\delta p} = 0 \tag{4.118}$$

על כן

$$\overleftrightarrow{\Pi} = \rho_0 \overline{\vec{v}\vec{v}} \tag{4.119}$$

בעזרת הווקטור $\hat{n}$ (של כוון הגל) יש לנו

$$\overleftrightarrow{\Pi} = \mathcal{E}\, \hat{n}\, \hat{n} \tag{4.120}$$

זה דומה לקשר בין שטף תנע וצפיפות אנרגיה לגל אלקטרומגנטי.

<u>תרגיל 4.10</u> מהי <u>צפיפות</u> התנע הממוצעת בגל קול ולגל מישורי?

---

5. <u>פוטנציאל גלי קול</u>

נחזור על הארגומנט המראה שניתן תמיד לתאר שדה המהירות בגל הקול הלינארי ע"י פוטנציאל. בגל לינארי $1 \gg \delta\rho/\rho$ ולכן אפילו אם הגל לא מישורי, ניתן לאמר ש

$$\frac{|\vec{v}|}{c_0} \sim \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 \tag{4.121}$$

במשוואת אוילר היחס בין איבר ההסעה לאיבר $\partial\vec{v}/\partial t$ הוא

$$\frac{|\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}|}{|\partial\vec{v}/\partial t|} \sim \frac{|\vec{v}|}{\lambda\omega} = \frac{|\vec{v}|}{c_0} \ll 1 \tag{4.122}$$

כי $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{\lambda}$, $\omega \sim \frac{\partial}{\partial t}$. לכן בהזנחת איבר ההסעה ולצורך איברים רבועים

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla}h \tag{4.123}$$

וזה אומר $\partial\vec{\omega}/\partial t = 0$. לא ניתן שיש ערבוליות תלויה בזמן. לכן $\vec{\omega}=0$. ואז מותר לכתוב $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$.

נציב $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ ב (4.23) לקבל

$$\vec{\nabla}\left(\rho_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} + c_0^2\, \delta\rho\right) = 0 \tag{4.124}$$

ארגומנט הגרדיינט יכול להיות פונקציה רק של זמן. ע"י הוספת פונקציה של זמן ל-ϕ, שאיננה משנה לערכה של $\vec{v}$, נוכל לעשות

$$\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + c_0^2\, \delta\rho = 0 \qquad (4.125)$$

ניקח נגזרת לפי זמן ונציב $\partial\delta\rho/\partial t$ מ-(4.18). מכיוון ש-$\Delta\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ נקבל

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.126)$$

שהיא משוואת הגל עבור ϕ עצמו.

הקול נוצר מתנועה של עצם בתוך הזורם, למשל מתנודדות עצם. כדי שכל הדיון יהיה קונסיסטנטי חשוב שהמהירות של כל עצם כזה בתנודותיו תהיה קטנה מ-c_0, כי אחרת התופעה לא תהיה קטנה לעומת c_0, וזה לא קונסיסטנטי עם $\delta\rho \ll \rho$. כיוון שמהירות העצם היא מסדר $\omega\tilde{a}$ כאשר $\tilde{a}$ היא אמפליטודת התנודה, ואנו רוצים $\omega\tilde{a} \ll c_0$, הרי ש

$$\tilde{a} \ll \bar{\lambda} \qquad (4.127)$$

כאשר $\bar{\lambda}$ הוא אורך הגל המתאים לתדירות התנודות.

כעת במקרה הראשון ניקח גוף שגודלו l מקיים

$$l \ll \bar{\lambda} \qquad (4.128)$$

התנודה יכולה להיות קטנה או גדולה בהשוואה ל-l. קרוב לעצם, כלומר במרחקים ממנו קטנים לעומת $\bar{\lambda}$, סקלת שינוי המרחבי של ϕ היא l. לכן

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \sim \frac{\omega^2}{c_0^2}\phi = \frac{\phi}{\bar{\lambda}^2} \ll \frac{\phi}{l^2} \sim \Delta\phi \qquad (4.129)$$

על כן אפשר להזניח האבר האחרון במשוואת הגל באזור הקרוב הזה:

$$\Delta\phi \approx 0 \qquad (4.130)$$

מסקנה אחת היא שבאזור הקרוב הזרימה נחשבת בלתי-דחיסה ($\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$). זה נוגד את האופי של קול, ולכן גלי הקול מתחילים רק במרחק דומה ל-$\bar{\lambda}$ מן העצם.

במרחק גדול לעומת l, אך קטן לעומת $\bar{\lambda}$, נוכל

לרשום את הפתרון לפתרון של משוואת לפלס (ראה (23)):

$$\phi = \frac{a(t)}{r} - \frac{\vec{A}(t)\cdot\vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \qquad (4.131)$$

$\vec{r}$ הוא וקטור מנקודה מסוימת בתוך הגוף, כפי שלמדנו מ-(2.4), הפונקציה $a(t)$ מודדת את כמות הנוזל הנוצרת, ויוצאת מן הגוף. כיוון שאנו בתחום הקרוב הגוף יכול לקבל רק את נפח הגוף, V, משתנה, ולכן אנו מסיקים ש

$$a = -\dot{V}(t)/4\pi \qquad (4.132)$$

כאשר מתרחקים מן הגוף ל $r \gg \lambda$ יש לעבוד עם משוואת הגל המלאה. עבור גל סימטרי כדורי, המתאים לסדר הראשון ב-(4.131)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.133)$$

ההצבה $\phi = f/r$ נותנת

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.134)$$

עם פתרון כללי (השווה (4.27))

$$f = f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t) \qquad (4.135)$$

כה מדובר במסיבת סימטריה כדורית, רק הגל היוצא f_1 מתאים לבעיה. ויש לקחת

$$f_1 = -\dot{V}(t - r/c_0)/4\pi \qquad (4.136)$$

כדי להתאים לצורה (4.131) עם (4.132) אם נצמצם את האבר עם $\vec{A}$ וכן r/c_0 לעומת t.

לכן בצורה הגל $r \gg \lambda$ יש לנו בסדר הקל מונופולית עם

$$\phi = -\frac{\dot{V}(t - r/c_0)}{4\pi r} + O(1/r^2) \qquad (4.137)$$

ברור ש

$$\vec{v} = \hat{r}\ddot{V}(t - r/c_0)/4\pi c_0 r + O(1/r^2) \qquad (4.137)$$

כאן השתמשנו ב- $\hat{r} = \vec{\nabla} r$ והזנחנו את האבר המתקבל מנגזרת ה-$1/r$ באבר מסדר $O(1/r^2)$. מ (4.125) אנו מקבלים

$$\delta\rho = \frac{\rho_0 \ddot{V}(t-r/c_0)}{4\pi c_0^2 r} + O(1/r^2) \tag{4.138}$$

מ (4.107) מתקבל שטף האנרגיה

$$\vec{J} = \hat{r}\,\frac{\rho_0 \ddot{V}^2}{16\pi^2 c_0 r^2} + O(1/r^3) \tag{4.139}$$

כיוון שהשטף רדיאלי, וכמו $1/r^2$, הספק האנרגיה הוא פשוט (בגבול $r\to\infty$)

$$\dot{E} = \frac{\rho_0 \ddot{V}^2}{4\pi c_0} \tag{4.140}$$

<u>דוגמה 4.1</u> גוף משנה נפח שלו לפי החוק

$$V = V_0(1 + k\sin\omega t); \qquad k < 1 \tag{4.141}$$

לכן (4.138)

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{V_0 k\omega^2}{4\pi c_0^2}\,\frac{1}{r}\,\sin\omega(t-r/c_0) \tag{4.142}$$

זה צריך להיות קטן בהשוואה ליחידה גם בהתחלת אזור הגל $\lambda \sim r$ ולכן יש לדרוש

$$k \ll 4\pi\,\lambda^3/V_0 \tag{4.143}$$

כיוון שכל הפתרון מבוסס על (4.128), האילוץ הזה מתקיים אוטומטית. איבוד האנרגיה לגל הוא

$$\overline{\dot{E}} = \frac{\rho_0 V_0^2 k^2 \omega^4}{8\pi c_0} \tag{4.144}$$

התלות $\propto \omega^4$ חוק ידוע.

במובן שיכולות להיות תנודות של עצם עם נפח קבוע. אזי אנו תלויים ב (4.131) עם $a=0$. נכתוב ϕ כך:

$$\phi = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{A}(t)}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{4.145}$$

זה ב $\lambda \gg r$. כאשר הולכים ל $\lambda < r$ יש לעבור לפתרון של משוואות הגל המלאה (4.126). ברור שצריך שם לקחת

$$\Phi = \vec\nabla \cdot \left(\frac{\vec A(t - r/c_0)}{r}\right) + O(1/r^3) \tag{4.146}$$

כי בגלל שאופרטור הגל $\Delta - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ חילופי עם הדיברגנס, וכל פונקציה $\vec A(t-r/c)$ פותרת משוואות הגל, הרי ש (4.146) פותר את משוואת הגל. יש לנו

$$\phi = -\frac{\dot{\vec A}(t - r/c_0)}{c_0 r} \cdot \hat r + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.147}$$

ולכן הפליטה היא דיפולית

$$\vec v = \vec\nabla\phi = \frac{\ddot{\vec A}(t - r/c_0)}{c_0^2 r} \cdot \hat r\, \hat r + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.148}$$

מ (4.125) יש לנו

$$\delta\rho = -\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \rho_0 \frac{\dddot{\vec A}(t - r/c_0)}{c_0^3 r} \cdot \hat r + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.149}$$

ומ-(4.107) שטף האנרגיה הוא

$$\vec J = \frac{\rho_0}{c_0^3} \frac{\left[\dddot{\vec A}(t - r/c_0) \cdot \hat r\right]^2 \hat r}{r^2} \tag{4.150}$$

הדיאגרמה היא דיפולית, אבל לא סימטרית-כדורית בגלל הפקטור $\cos^2\theta$ במונה. כיוון שהממוצע על פני כדור של $\cos^2\theta$ הוא $1/3$ הרי ש

$$\dot E = \frac{4\pi\rho_0}{3c_0^3}|\dddot{\vec A}|^2 \tag{4.151}$$

ויש להשוות זה עם (4.140).

<u>דוגמה 4.2</u> כדור בעל רדיוס R, הטבול בנוזל בלתי דחיס, אשר תנודתו כך שמהירותו היא

$$\vec u = \vec u_0 \sin\omega t \qquad u_0/\omega \ll R \tag{4.152}$$

חשב את האנרגיה בגלי קול ליחידת זמן (הספק).

ראשית כל נכתוב

$$\vec u = -\mathrm{Im}\, \vec u_0 e^{-i\omega t}$$

ולבסוף נקח-חלק המדומה של הכמויות המתקבלות. אפשר לנחש ש ϕ לינארי ב $\vec{u}$ ולכן נעשה אנזץ

$$\phi = \vec{u}\cdot\vec{r}\, f(r)$$

ויש עלינו למצוא f. אם נציב במשוואת הגל נראה ש

$$(4.153)\qquad \vec{u}\cdot\vec{r}\,\underbrace{\left[\Delta f + \frac{\omega^2}{c_0^2} f\right]}_{\text{כזכור, לכן יכול להיות רק קבוע}} = 0$$

הפתרון הוא

$$(4.154)\qquad f = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{const.}}}{b}\,\frac{e^{ikr}}{r} + \text{const.} \qquad k \equiv \omega/c_0$$

$$(4.155)\qquad \phi = b\,\vec{u}\cdot\vec{r}\left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3}\right)e^{ikr}$$

את b נמצא מהתנאי שהנגזרת הרדיאלית $\partial\phi/\partial r$ ב $r=R$ תהיה $\vec{u}\cdot\hat{r}$ (מהירות הכדור בכיוון הרדיאלי). יש לזכור ש $\partial\hat{r}/\partial r = 0$ (2.136):

$$(4.156)\qquad b\,\vec{u}\cdot\hat{r}\left(-\frac{ik}{r^2} + \frac{2}{r^3} - \frac{k^2}{r} - \frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr}\Big|_{r=R} = \vec{u}\cdot\hat{r}$$

זה נותן

$$(4.157)\qquad b = \frac{R^3 e^{-ikR}}{2 - 2ikR - k^2R^2}$$

אבל כל הזמן אנו מעוניינים במקרה $\lambda \gg R$; לכן נקבל $b = R^3/2$.

$$(4.158)\qquad \phi = \frac{i\omega R^3}{c_0\, 2}\,\vec{u}_0\cdot\frac{\hat{r}}{r}\, e^{-i\omega(t - r/c_0)} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

המשוואה עם (4.147) נותנת

$$(4.159)\qquad \dot{\vec{A}}(t) = -i\omega\,\frac{R^3}{2}\,\vec{u}_0\, e^{-i\omega t}$$

כמובן שנקח-החלק המדומה כאן

$$(4.160)\qquad \dot{\vec{A}}(t) = +\omega\,\frac{R^3}{2}\,\vec{u}_0\cos\omega t$$

נציב ב (4.151) ונמצע על הזמן $\left(\overline{\sin^2\omega t}=\frac{1}{2}\right)$ לקבל

$$\overline{\dot{E}} = \frac{\pi\rho_0|\vec{u}_0|^2\omega^4R^6}{6c_0^3} \qquad (4.161)$$

ההבדל בין זה להספק בפעימה המונופולית (4.144) הוא בפקטור $|\vec{u}_0|^2/c_0^2$ קטן! שניהם בפרופורציוניים ל ω^4. יש אבל לשים לב שאם נשווה עצמים שעושים תנודה בעלת אמפליטודה קווית $\tilde{a}$ נתונה, $u \propto \omega\tilde{a}$ ולכן התלות של $\dot{E}$ בתדירות הוא כמו ω^6,

---

כל האמור עבור $\ell \ll \lambda$. מה יקרה כאשר התדירות כל כך גבוהה ש $\lambda \ll R$? אז אורך הגל מגיע עד דופן הגוף. אם נתבונן באזור קטן של אותו דופן נוכל לקרב אותו כשטח. בתנועתו עם מהירות $\vec{u}$ הוא יפיק גל קול מישורי (בקירוב). ברור שמהירות הזורם בגל סמוך לדופן תהיה $\vec{u}_n$ (הרכיב האנכי של $\vec{u}$). עבור גל מישורי אפשר להשתמש ב (4.99) וב (4.108) לקבל

$$\dot{E} = \oint \vec{J}\cdot d\vec{S} = c_0\rho_0\int|\vec{u}_n|^2 dS \qquad (4.162)$$

אין כאן תלות בתדירות התנודה כי אנו עוסקים באמפליטודת מהירות נתונה.

__תרגיל 4.11__ כדור משנה רדיוסו לפי

$$R(t) = R_0(1+\kappa\sin\omega t) \qquad \kappa \ll 1 \qquad (4.163)$$

ויש לנו $\omega R_0 \ll c_0$. חשב פליטת האנרגיה בגלי קול. מהי התלות בתדירות של ההספק בממוצע זמן?

__תרגיל 4.12__ האם כדי לקבל (4.157) חייבים להניח $R \ll \lambda$? מה עם $u_0/\omega \ll R$? מדוע? נניח שהתנאי השני מתקיים אך הראשון לא. רשום ϕ ו- $\vec{A}$ בלי הקירוב שנעשה ב(4.158). במה משתנה ההספק בגלי קול מ-(4.161)?

__תרגיל 4.13__ בכל האמור הזנחנו צמיגות. מהו התנאי שמצדיק זה לכדור המבצע תנודות הרמוניות כמו (4.152) הקטנות מרדיוס הכדור?

ח: דעיכת גלי קול

צמיגות שהתעלמנו עד כאן בטפול בגלי קול, גורמת לדעיכת הגלים כתוצאה מדיסיפציה. כאן נחשב מקדם הדעיכה.

לזורם דחוס למדנו שקצב יצירת אנטרופיה הוא [(2.78)]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\eta \, \mathrm{Tr}\, \overleftrightarrow{\sigma}^2 \qquad (4.164)$$

(כאן הזנחנו הצמיגות השניה). נזכיר

$$\overleftrightarrow{\sigma} \leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\, \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \qquad (4.165)$$

עבור גל מישורי המתקדם בכוון x בתדירות ω, יש לנו לפי (4.41)

$$v_x = v_0 \sin(\omega x/c_0 - \omega t) \qquad (4.166)$$
$$v_y = v_z = 0$$

מכאן ש

$$\sigma_{xx} = \frac{4}{3}\frac{\omega}{c_0} v_0 \cos(\omega x/c_0 - \omega t) \qquad (4.167)$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{2}{3}\frac{\omega}{c_0} v_0 \cos(\omega x/c_0 - \omega t)$$

ולכן

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{4\eta}{3}\frac{\omega^2}{c_0^2} v_0^2 \cos^2(\omega x/c_0 - \omega t) \qquad (4.168)$$

אפשר לפרש $T\,ds$ כאנרגיה שעברה מהקול לחום:

$$\overline{\dot{E}_{mech}} = -\frac{2}{3}\eta \frac{\omega^2}{c_0^2} v_0^2 \qquad (4.169)$$

היא האנרגיה ליחידת נפח שעברה דיסיפציה. מצד שני האנרגיה <u>הממוצעת</u> הנשאת ע"י הגל ליחידת נפח הוא (4.99)

$$\overline{E_{mech}} = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 \qquad (4.170)$$

כיוון שיש כאן פרופורציה ניתן לאמר שאלמנט זורם יש בו דעיכה בזמן של האנרגיה בקול לפי

$$\overline{\mathcal{E}}_{mech} \propto e^{-\frac{4\eta\omega^2}{3\rho_0 c_0^2}t} \tag{4.171}$$

יש עוד דרך להציג זה. בזמן Δt מתקדם הגל $\Delta x = c_0\Delta t$.
האנרגיה פרופורציונית לריבוע אמפליטודת הגל של או
$\delta\rho/\rho_0$. לכן

$$\sqrt{\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2}} \propto e^{-\frac{2}{3}\frac{\eta\omega^2}{\rho_0 c_0^3}x} \tag{4.172}$$

נותן חוק דעיכת אמפליטודת הגל עם עומק בתווך.
נשים לב אחד התנאים לנוסחאות אלה הוא שזמן הדעיכה
$\rho_0 c_0^2/\eta\omega^2$ יהיה ארוך לעומת מחזור הגל ושני (עומק הדעיכה
מ (4.172) יהיה ארוך לעומת אורך הגל). אחרת אי
אפשר להשתמש בתמונה של גל משורי. לכן אנו דורשים

$$\omega \ll \frac{c_0^2}{\nu} \tag{4.173}$$

ז"א אסור שהקול יהיה בעל תדירות גבוהה מדי.

כעת, לגבי אוויר התנאי הזה מתקיים אוטומטית
אם הגל מקיים התנאים לשימוש בתמונת הרצף כי
אורך הגל $\bar{\lambda}$ הוא הסקלה L שצריכה להיות גדולה לעומת
מהלך החופשי של המולקולות. זה אומר

$$\frac{c_0}{\omega} = \bar{\lambda} \gg \lambda_{mol} \tag{4.174}$$

מצד שני בגז $\nu \sim \sqrt{\langle v^2\rangle}\,\lambda_{mol}$. אבל מכיוון ש $c_0 \approx \sqrt{\langle v^2\rangle}$ אז
ש (4.174) נותן את (4.173). לכן אם מותר להשתמש
במודל הרצף, החוק (4.172) מתקיים.

לפי (4.172) גל קול חודר בתווך לעומק מסדר $\ell = c_0^3/\nu\omega^2$
לפני שהוא דועך לגמרי. עם הנוסחה עבור ν לגז זה נותן
לנו

$$\ell \sim \bar{\lambda}^2/\lambda_{mol} \tag{4.175}$$

[illegible] k.1 שבחדר $\lambda_{mol} \approx 10^{-4}$cm. לכן גל ב $\bar{\lambda} = 1$cm
$(\omega \approx 3\times10^4$ Hz$)$ חודר כמה מטר.

<u>תרגיל 4.14</u> במודל הנ"ל [illegible] מצא שלנו בפיקוח
מאלה. מה זה אומר על טווח הקול?

ט. החזרת גלי קול

נגיד שגל מישורי עם מהירות (4.41) פוגע בדופן מוצק ב $z=0$. מה קורה? ישנה החזרה. נחשב באיזה כוון ובמה. עבור פוטנציאל הגל הפוגע ניקח

$$\phi_i = \frac{c}{\rho_0} F_i(\hat{n}\cdot\vec{x} - ct) \qquad (4.176)$$

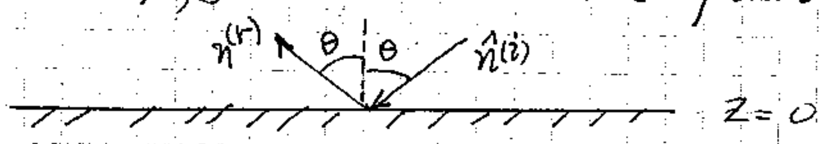
כאשר $F_i' = f_i$, בהתאם שמשחזרים (4.41). הפוטנציאל של הגל המוחזר גם יקיים משוואות הגל, ובגלל שהיא לינארית, $\phi_i+\phi_r$ גם פתרון למשוואה הטוטאלית עקב ההחזרה. תנאי השפה אומר ש v_z הכוללת מתאפס ב $z=0$:

$$n^{(i)}_z f_i(n^{(i)}_x x + n^{(i)}_y y - ct) + n^{(r)}_z f_r(n^{(r)}_x x + n^{(r)}_y y - ct) = 0 \qquad (4.177)$$

כמובן שלכל גל יש כוון $\hat{n}$ שונה. כדי שהמשוואה הזו תתקיים לכל t, y ו-x צריך

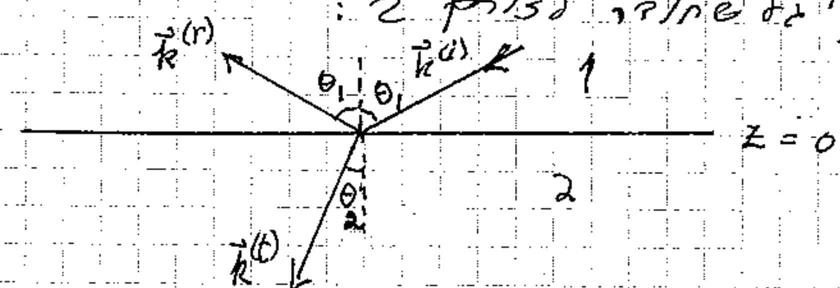
$$n^{(r)}_x = n^{(i)}_x; \quad n^{(r)}_y = n^{(i)}_y; \quad f_i(x) = f_r(x) \qquad (4.178)$$

ובנוסף $n^{(r)}_z = -n^{(i)}_z$. כלומר בהחזרה מתהפך רכיב z של $\hat{n}$ אבל הרכיבים האחרים נשמרים. ז"א ההחזרה היא בזווית לאנך שווה לזווית הפגיעה, וקורת באותו מישור



רואים שפרופיל הגל נשמר. בין היתר זה אומר שאם יש תדירות מסוימת, היא תשמר בהחזרה. יש לציין ש (4.178) עם $n^{(r)}_z = -n^{(i)}_z$ עולה בקנה אחד עם העובדה ש $\hat{n}$ וקטור יחידה. כמובן שבהחזרה מוחזרת כל האנרגיה.

כעת נתייחס לסיטואציה בה $z=0$ מפריד בין שני תווכים שונים 1 ו 2. אינטואיטיבית ברור שתהיה החזרה אבל גם גל שיעבור לתווך 2:



התוצאה פשוטה יותר עבור גל מונוכרומטי כמו (4.33).
ניתן לייצג סופרפוזיציה של הרבה כאלה לתאור כל
פרופיל. לכן ניקח

$$\phi^{(i)} = A e^{i(\vec{k}^{(i)}\cdot\vec{x} - \omega^{(i)} t)}$$

$$(4.179) \qquad \phi^{(r)} = B e^{i(\vec{k}^{(r)}\cdot\vec{x} - \omega^{(r)} t)}$$

$$\phi^{(t)} = C e^{i(\vec{k}^{(r)}\vec{x} - \omega^{(t)} t)}$$

תנאי גבול אחד הוא שב $Z=0$, v_z תהיה רציפה. זה
אפשרי רק אם

$$(4.181) \qquad \vec{k}_\perp^{(i)} = \vec{k}_\perp^{(r)} = \vec{k}_\perp^{(t)} \equiv \vec{k}_\perp$$

$$(4.182) \qquad \omega^{(i)} = \omega^{(r)} = \omega^{(t)} \equiv \omega$$

$$(4.183) \qquad A k_z^{(i)} + B k_z^{(r)} = C k_z^{(t)}$$

הראשונה נחוצה כדי שתנאי $\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial\phi^{(r)}}{\partial z} = \frac{\partial\phi^{(t)}}{\partial z}$ יתקיים
לכל x, y. השניה כדי שגם
יתקיים לכל t. השלישית הוא התנאי עצמו בלי
האקספוננטים שנופלים החוצה. (4.18) מראה
שההחזרה והתשבירה לצורך z קורות במישור
המוגדר ע"י הגל הפוגע והאנך.

מכיוון שכל ϕ חייב לקיים משוואות הגל (4.126) יש
לנו

$$(4.184) \qquad |\vec{k}^{(i)}| = |\vec{k}^{(r)}| = \omega / c_1$$

$$(4.185) \qquad |\vec{k}^{(t)}| = \omega / c_2$$

מכיוון ש $|\vec{k}|\sin\theta = |\vec{k}_\perp|$ כאשר θ הוא הזווית מן
האנך, יוצא ש

$$(4.186) \qquad \theta^{(r)} = \theta^{(i)} \equiv \theta_1; \qquad c_2 \sin\theta_1 = c_1 \sin\theta_2$$

באחרונה השתמשנו ב (4.181) ביחד עם (4.184) $\theta_2 \equiv \theta^{(t)}$
ו-(4.185). התנאים האלה מקבילים לחוקי החזרה ושבירה באופטיקה.

ברור מ (4.181) ו- (4.184) ש $|k_z^{(i)}| = |k_z^{(r)}|$. ברור
מהתמונה שסימן $k_z^{(i)}$ הפוך לזה של $k_z^{(r)}$. לכן נובע

לכתוב (4.183) כך:

$$(4.187) \qquad \frac{\omega}{c_1}\cos\theta_1\,(A-B) = \frac{\omega}{c_2}\cos\theta_2\,C$$

זו רק משוואה אחת עבור 2 נעלמים B/A ו- C/A.

המשוואה השניה נקבל מן התנאי שהפרעת הלחץ קל תהיה רציפה ב $z=0$ (לאורך הגבול, שאולי שלקלט יקבל תשובה ∞). מהמשוואות (4.125) ו- (4.116k) נקבל

$$(4.188) \qquad \delta p = -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

ולכן $\rho_2\dfrac{\partial\phi^{(t)}}{\partial t} = \rho_1\left(\dfrac{\partial\phi^{(i)}}{\partial t}+\dfrac{\partial\phi^{(r)}}{\partial t}\right)$, כלומר

$$(4.189) \qquad \omega\rho_1(A+B) = \omega\rho_2 C$$

נכפול האחרונה ב $\cos\theta_1/c_1\rho_1$ ונחבר אותה עם (4.187) כך שה B נעלם. את c_2 נכתוב במונחי c_1 בעזרת (4.186) ואז נקבל

$$(4.190) \qquad \frac{C}{A} = \frac{2}{\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}$$

את B/A אפשר לקבל מ (4.189).

כעת נחשב מנת ההגדרה לפי (?) 2, T, שהוא היחס בין שטף האנרגיה $|\vec{J}_2|$ ל $|\vec{J}_1|$. מ (4.99) ו- (4.108) $|\vec{J}| = \rho_0 c_0 v^2$ ברור ש

$$|\vec{J}_1| = \rho_1 c_1 |A|^2 |\vec{k}^{(i)}|^2 \qquad |\vec{J}_2| = \rho_2 c_2 |C|^2 |\vec{k}^{(t)}|$$

ולפי (4.184) (4.185) ו- (4.190)

$$T = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\cancel{c_2}}{\cancel{c_1}}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\cancel{2}}\frac{4}{\left(\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}+\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2}$$

כמובן שכאן יש עדיין לבטא $\tan\theta_2$ במונחים של θ_1 לפי (4.186).

במקרה $\theta_1\to 0$ ברור מ (4.186) ש $\tan\theta_1/\tan\theta_2 = c_1/c_2$

ולכן

$$T = \frac{4\rho_1 \rho_2 c_1 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

קל לבדוק ש $T \leq 1$. עבור $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ מקבלים $T = 1$
כלומר אין החזרה כלל.

<u>תרגיל 4.15</u> מצא את מנת ההחזרה R בשתי דרכים שונות.

<u>תרגיל 4.16</u> עבור המקרה $c_1 > c_2$ עם $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$ או
$c_1 < c_2$ עם $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$ הראה שעבור

$$\tan^2\theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2 (c_1^2 - c_2^2)}$$

אין כלל החזרה.
