3. טורבולנטיות

א. מבוא

זו עובדה אמפירית שזרימה מהירה של נוזל ריאליסטי הינה זרימה כאוטית. בכל נקודה מהירות הזרימה תלויה בזמן באופן אקראי. על נקל לגלות סימנים של ערבוליות בזרימה כזו. רואים מערבולות, ומערבולות בתוך מערבולות. ברגע מסוים מהירות הזרימה משתנה באופן כמעט אקראי ממקום למקום. כתוצאה מחוסר האפשרות להניח שלפחות חלק מהזרימה מתפתחת באופן דטרמיניסטי, הטיפול המתמטי בטורבולנציה (אוסף של כל התופעות שציינו) הוא מסובך, ועדיין לא מאד מפותח כיום.

חשיבות הטורבולנציה הינה לא רק בהיותה בעיה קשה מבחינה מתמטית ופיזיקלית. יש לה השלכות טכנולוגיות וכלכליות רבות השפעה. מטוס לא ימריא אם לא הטורבולנציה מתחת לכנפיו. אבל חלק נכבד מהצריכת דלק שלו הולכת להתגבר על ההתנגדות לתנועת המטוס עקב טורבולנציה. כתוצאה הבנה טובה יותר של הטורבולנציה חשובה לתכנון, ולא רק מטוסים יותר טובים, אלא גם ספינות, מכוניות וכו'.

כיוון שהטורבולנטיות מאד מסובכת, התפתחו תאוריות ומודלים שונים להבהרתה. לא תמיד ישנו קשר מסודר בין אחד לשני. כאן נטפל בכמה גישות להבנת הופעת הטורבולנציה והתפתחותה לטורבולנציה מלאה. נדבר פחות על פתרון בעיות ספציפיות כמו בפרקים הקודמים.

העובדה הבסיסית בטורבולנציה התגלתה ע"י ריינולדס בשנת ה-1880, והוא שכאשר מה שקוראים היום מספר ריינולדס עולה בזרימה מסוימת, טורבולנציה מופיעה באופן די פתאומי. העובדה היא כלהלן: מספר ריינולדס הוא שקובע מתי יש טורבולנציה, ולכן המעבר לטורבולנציה הוא בתחום צר של מספרי ריינולדס. התפתחות הפתאומית של הטורבולנציה הוא הדבר הראשון שטעון הסבר.

ב. אי-יציבות של זרימה סטציונרית

זרימות עמידות מוכרות נשוונות. כמו כן לכל מספר ריינולדס אפשר שנמצא פתרון סטציונרי של משוואות נביה-סטוקס. למה אם כן מופיעה טורבולנטיות? כי בשלב מסוים הפתרונות הסטציונריים הם בהכרח בלתי יציבים. כיצד בודקים אם זרימה מסוימת היא יציבה או לא?

בפרק זה נעסוק בזרימה בלתי דחיסה ותמיד ניקח ρ בקבוע. המשוואה הבסיסית שלנו תהיה (2.97) אך בכללה:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\underset{\sim}{\vec{\nabla}}\vec{V} = -\underset{\sim}{\vec{\nabla}}P + \frac{1}{Re}\underset{\sim}{\Delta}V \qquad (3.1)$$

מגיעים לכן כמו ל (2.97) ע"י סקילינג כמו (2.100) רק שכאן
יש תלות בזמן, ולכן

$$\vec{v} = U\,\vec{V}(\vec{x}/L,\, tU/L,\, Re) \tag{3.2}$$
$$p = \rho U^2 P(\vec{x}/L,\, tU/L,\, Re)$$

ו- $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$ מסמן נגזרת לפי "הזמן" חסר מימדים $\tilde{t} = tU/L$. נציב
במשוואות הרציפות (3.1)

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{3.3}$$

ותנאי גבול

$$\vec{V}\big|_{\text{גבול}} = 0 \tag{3.4}$$

נניח שנמצא פתרון בלתי תלוי בזמן $\vec{V}_0, P_0$. כדי לבדוק
יציבותו נחפש פתרון תלוי בזמן קרוב אליו

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \qquad |\vec{V}_1| \ll |\vec{V}_0| \tag{3.5}$$
$$P = P_0 + P_1 \qquad |P_1| \ll P_0$$

נציב ב- (3.1) ונקבל

$$\vec{V}_0 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_0 + \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial \tilde{t}} + \vec{V}_0 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_0 + \vec{V}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_1 =$$
$$- \underset{\sim}{\vec{\nabla}} P_0 - \underset{\sim}{\vec{\nabla}} P_1 + \frac{1}{Re} \underset{\sim}{\Delta} \vec{V}_0 + \frac{1}{Re} \underset{\sim}{\Delta} \vec{V}_1 \tag{3.6}$$

כאן נבטל האיברים שלא מופיע בהם $\vec{V}_1$ כי הם מקיימים
המשוואה המגדירה $\vec{V}_0$ ו- P_0. כמו כן נזניח $\vec{V}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_1$
כי הוא מסדר שני. לכן

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \cdot \underset{\sim}{\vec{\nabla}} \vec{V}_0 \simeq - \underset{\sim}{\vec{\nabla}} P_1 + \frac{1}{Re} \underset{\sim}{\Delta} \vec{V}_1 \tag{3.7}$$

בלי קירובים נקבל מ- (3.3) ו- (3.4)

$$\underset{\sim}{\vec{\nabla}} \cdot \vec{V}_1 = 0 \tag{3.8}$$

$$\vec{V}_1 \big|_{\text{גבול}} = 0 \tag{3.9}$$

כיוון ש (3.7)-(3.9) הוא מערכת ליניארית ב $\vec{V}_1, P_1$
וגם המקדמים בלתי תלויים ב- $\tilde{t}$
אפשר למצוא הפתרון הכללי כסופרפוזיציה של

פתרונות מהצורה

$$\vec V_1 = \vec f(\vec x/L, Re)\, e^{-i\omega \tilde t}$$
$$P_1 = g(\vec x/L, Re)\, e^{-i\omega \tilde t} \qquad (3.10)$$

ה $\vec f$ ו- g מקיימות

$$-i\omega \vec f + \vec V_0\cdot\vec\nabla \vec f + \vec f\cdot\vec\nabla \vec V_0 = -\vec\nabla g + \frac{1}{Re}\Delta \vec f \qquad (3.11)$$

$$\vec\nabla\cdot\vec f = 0 \qquad (3.12)$$

$$\vec f\,\big|_{\text{גבול}} = 0 \qquad (3.13)$$

מערכת כזו היא "בעית ערך עצמי". כלומר רק עבור ω מסוימות ימצאו פתרון $(\vec f, g)$. ותכן, אפילו שהם תהיינה מרוכבות. פיסיקלית, ובגלל הדיסיפציה היינו מצפים שחלקו המדומה של ω יהיה שלילי כך ש

$$(\vec f, g)\times e^{-i\omega\tilde t} \qquad (3.14)$$

הולך ודועך. אבל התברר שבמספר ריינולדס גדול אין צורה סטציונרית ותשובה אומרת שלפחות של ω אחד הוא חיובי עבור Re גדול. מסקנתנו לאור האינפורמציה הנסיונית היא ש-

$$\omega = \omega_1(Re) + i\gamma(Re) \qquad (3.15)$$

כאשר γ שלילית עבור Re קטן מספיק, וחיובית עבור Re מספיק גדול. הערך של Re בו γ הופכת סימן נקרא מספר ריינולדס הקריטי Rer.

אפשר להראות תאורטית שאכן יש תחום סופי של Re של יציבות, כלומר שבו כל הפרעה לזרימה הסטציונרית דועכת. ב-(3.6) נזנוח האיברים הלא מופרעים, ונכפול ב $\vec V_1$ סקלרית:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde t}\vec V_1^{\,2} = -\vec V_1\cdot(\vec V_1\cdot\vec\nabla\vec V_0) - \vec V_1\cdot(\vec V_0\cdot\vec\nabla\vec V_1) - \vec V_1\cdot(\vec V_1\cdot\vec\nabla\vec V_1)$$
$$-\vec V_1\cdot\vec\nabla P_1 + \frac{1}{Re}\vec V_1\cdot\Delta\vec V_1 \qquad (3.16)$$

האיבר השני ושלישי באגף ימין הם (זכור $\vec\nabla\cdot\vec V_0 = \vec\nabla\cdot\vec V_1 = 0$)

$$\vec V_1\cdot\left((\vec V_0+\vec V_1)\cdot\vec\nabla\vec V_1\right) = \vec V_1\cdot\vec\nabla\cdot\left[\vec V_1(\vec V_0+\vec V_1)\right] = \frac{1}{2}\vec\nabla\cdot\left[\vec V_1^{\,2}(\vec V_0+\vec V_1)\right] \qquad (3.17)$$

כאן הקונטרקציה של $\vec\nabla$ בדיוק לאלה של $\vec V_0+\vec V_1$, כאשר המכפלה הסקלרית מצמידה $\vec V_1$ ל $\vec V_1$. לכן הצורה

האחרונה. כמו כן בגלל ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_1=0$ אפשר להחליף $\vec{V}_1\cdot\vec{\nabla}P_1$ ב $\vec{\nabla}\cdot(\vec{V}_1P_1)$ -. עתה נעבד איבר האחרון ב (3.16)

$$\vec{V}_1\cdot\Delta\vec{V}_1=\sum_i V_{1i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}V_{1i}=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i V_{1i}\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_k}\right)-\sum_{ik}\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_k}\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_k}$$

$$(3.18)\qquad =\frac{1}{2}\sum_k\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\vec{V}_1^2-\sum_{ik}\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_k}\frac{\partial V_{1i}}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}_1^2-\vec{\nabla}\vec{V}_1:\vec{\nabla}\vec{V}_1$$

בעזרת כל זה (3.16) הופכת ל-

$$(3.19)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\vec{V}_1^2=-\vec{V}_1\cdot(\vec{V}_1\cdot\vec{\nabla}\vec{V}_0)-\frac{1}{Re}\vec{\nabla}\vec{V}_1:\vec{\nabla}\vec{V}_1$$

$$-\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{1}{2}\vec{V}_1^2(\vec{V}_0+\vec{V}_1)-\frac{1}{2Re}\vec{\nabla}\vec{V}_1^2+\vec{V}_1P_1\right]$$

נאנטגרל כל זה על כל הנפח. בגבולות יש $\vec{V}_1=\vec{V}_0=0$ ובתוצאה מזה האיבר תחת הדיברגנץ לא נותן כלום.

$$(3.20)\qquad \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int\vec{V}_1^2d^3x=-\underbrace{\int\vec{V}_1\cdot(\vec{V}_1\cdot\vec{\nabla}\vec{V}_0)d^3x}_{D[\vec{V}_1]}-\frac{1}{Re}\underbrace{\int\vec{\nabla}V_1:\vec{\nabla}V_1d^3x}_{B[\vec{V}_1]>0}$$

נניח שישנה אי-יציבות. אז במשך הזמן האינטגרל על $\vec{V}_1^2$ שכולו חיובי יגדל, ולכן אגף ימין של המשוואה יעשה חיובי במוקדם או במאוחר. אם כן D יהיה שלילי ו-

$$(3.21)\qquad -D-\frac{B}{Re}>0$$

ומכיוון ש $B>0$

$$(3.22)\qquad Re>-\frac{B}{D}\equiv R[\vec{V}_1]$$

כאן היחס B/D - הוא פונקציונל של $\vec{V}_1$, שבתנאים מסוימים אסור שיהיה שלילי. נחפש מינימום של R בתנאי ש- $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_1=0$ וגם $\vec{V}_1=0$ על הגבולות, אבל חופשי מזה על כל הפונקציות הווקטוריות $\vec{V}_1$. ברור ש Re גבול מלמטה מינימלי. המינימום לא יכול להיות אפס, כי B בברור חיובי. המסקנה היא ש Re בנסיבות של אי-יציבות, אינו יכול להיות קרוב לאפס. המינימום של R יכול לשמש כגבול תחתון ל-R_{cr}. הלכה למעשה הגבול הזה הוא מאוד נמוך לעומת הערכים הגבוליים של R_{cr} המתקבלים בניסויים. אבל העיקר: טורבולנציה לא תופיע אלא מעל למספר ריינולדס מינימלי - בניסוי.

ג. התפתחות אי-יציבות רכה

כאשר Re עולה במקצת מעל R_{cr}, רק אופן אחד והוא של γ חיובית, והוא יהיה קטנה לעומת ω_1 המתאים. זה אומר

$$\vec{V}_1 = \underbrace{e^{\gamma(Re)\tilde{t}}\, e^{-i\omega_1(Re)\tilde{t}}}_{A(t)}\, \vec{f}\,(\vec{x}/L, Re) \tag{3.23}$$

האמפליטודה $A(t)$ נעשית גדולה יותר עם הזמן. כעבור מספיק זמן $\vec{V}_1$ לא תהיה מספיק קטנה כדי שנוכל להזניח אפקטים לא-ליניאריים ב-(3.6). ספציפית, האיבר $\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_1$ עושה אוסצילציות עם תדירות $2\omega_1$ ומזין תדירות זו לתוך $\vec{V}_1$ עצמה. התהליך חוזר חלילה: עתה האיבר הלא-ליניארי ב-(3.6) יש לו תדירויות $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$ ו-$4\omega_1$ והוא מזין אותן ל-$\vec{V}_1$ דרך המשוואה. בסוף $\vec{V}_1$ כולל כל המכפלות השלמות של ω_1.

בינתיים הפקטור $e^{\gamma\tilde{t}}$ עובר גם הוא טרנספורמציה לא ליניארית שמונעת ממנו להתבדר. אומרים שהוא מגיע לרוויה:

$$\vec{V}_1 \rightarrow A_{max}(t)\,\vec{f} \tag{3.24}$$

ה-A_{max} היא פונקציה מחזורית ב-$\omega_1 t$ בגלל שכל פונקציה מחזורית יש לה טור פוריה בכל המכפלות של $\omega_1 t$. ליתר דיוק יש לכתוב

$$A_{max} = A_{max}(\omega_1\tilde{t} + \phi_1) \tag{3.25}$$

כאשר ϕ_1 היא פזה שהופיעה כתוצאה מתנאי ההתחלה של האי-יציבות, ו-

$$A_{max}(z + 2\pi) = A_{max}(z) \tag{3.26}$$

אפשר לתת תאוריה לגבי גודלה של A_{max} אך ליתר דיוק גודלה של $\overline{A_{max}^2}$ כאשר הממוצע הוא על פני מחזור אחד ושלו. כאשר $A(t)$ הייתה בראשיתה (ראה (3.23)),

$$\frac{d}{d\tilde{t}}|A|^2 \approx 2\gamma(Re)\,|A|^2 \tag{3.27}$$

אפשר למצע משוואה זו על מחזור אחד, ויש לראות המשוואה המתקבלת כתחילת טור טיילור ל-$d/d\tilde{t}\,\overline{|A|^2}$ (כאן $\tilde{t}$ גדול הוא נגזרת על זמן ארוך לעומת $1/\omega_1$).

מה נוסיף באגף ימין? תוספות כמו AAA^* לא
באות בחשבון. ראשית כי הן לא ממשיות וכזכור
לבנות משוואה עבור הכמות הממשית $|A|^2$. שנית
יש להן אוסצילציה בזמן כמו $e^{-i\omega t}$ שהיינו אמורים
למצע הלאה. אם כן יש להכליל פנומנולוגית את
(3.27)

$$\frac{d}{dt}\overline{|A|^2} = 2\gamma(Re)\overline{|A|^2} - \alpha\left(\overline{|A|^2}\right)^2 - \beta\left(\overline{|A|^2}\right)^3 \dots \tag{3.28}$$

כאן α ו- β פונקציות של הגאומטריה של הזרימה ושל Re.

בהנחה ש $\alpha>0$ לפחות בקרבת $Re=R_{cr}$, נוכל להזניח את האיבר מסדר שלישי. אז רואים ש

$$\overline{|A|^2} \to \overline{|A_{max}|^2} = 2\gamma(Re)/\alpha \tag{3.29}$$

כיוון ש γ עוברת משלילית לחיובית דרך 0 ב- $Re=R_{cr}$ אפשר לקרב שם

$$\gamma = C\cdot(Re - R_{cr}) + \dots \tag{3.30}$$

לא סביר שגם ל α יש אפס ב $Re=R_{cr}$ - זה היה נתפס בגדר מקריות מכוונת. משתי המשוואות האחרונות נובע שקרוב ל R_{cr}

$$\text{"}A_{max}\text{"}\ \left(\overline{|A_{max}|^2}\right)^{1/2} \propto \sqrt{Re-R_{cr}} \tag{3.31}$$

באופן מקורב

מכאן שאמפליטודת ההפרעה המחזורית מתחילה מאפס. נקראת אי-יציבות כזו "רכה".

3. <u>אי יציבות קשה</u>

אם $\alpha<0$ אין ב (3.28) בלי איבר ה β מגבלה לגדילה של $\overline{|A|^2}$. על כן במקרה זה נוסיף את האיבר מסדר ששי. בוודאי קורה כאשר האיבר השני ב (3.28) מתאפס וזה דורש ש $\beta>0$:

$$(3.31)\qquad \left(\overline{|A_{max}|^2}\right)^{1/2} = \left[\frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2\gamma(Re)}{\beta}}\,\right]^{1/2}$$

על נקל לראות שבתחום $Re > R_{cr}$ בו $\gamma > 0$ השורש השלילי אינו פיזיקלי. לכן נשתמש בחיובי. שים לב נניח שב-$Re = R_{cr}$ אין α או β מתאפסים. לאור (3.30) ניתן לפתח בטור טיילור את השורש הפנימי ולאחר מכן את החיצוני, ולקבל בקרבת R_{cr}

$$(3.32)\qquad \text{"}|A_{max}|\text{"} \simeq \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} + \frac{\beta^{1/2} C\cdot(Re - R_{cr})}{|\alpha|^{3/2}}$$

עבור $Re > R_{cr}$ רואים ש-$|A_{max}|$ לא מתחיל מאפס כבמקרה בסעיף ג. בכל התחום הזה ההפרעה המתחילה לזרימה על הסטציונרית הינו תמיד סופית ולא קטנה אחרי זמן מה של התפתחות. אומרים שהאי-יציבות הינה "קשה".

יש לציין שלמשוואה (3.28) יש נקודה קבועה (fixed point) ב-(3.31) גם עבור γ שליליות, כל עוד γ לא שלילית מדי. זה פותח האפשרות שבתחום שהוא בדרך כלל יציב ($Re < R_{cr}$) הינו בעצם רק מטסטבילי, כלומר, יציב כנגד הפרעות אינפיניטסימליות שדועכות, אבל אי-יציב כנגד הפרעות מספיק חזקות. במקרה של אחת כזו בתחום המטסטבילי תופיע הפרעה בגודל (3.31) מיידית.

ה. הסעת אי-יציבות

האופי של האי-יציבות הראשונית שונה במקרה של זרימה בצינור. כאן ישנה אפשרות שהאלמנטים הטבליים מהאי-יציבות נישאים כל כך מהר עם הזרם שבנקודה קבועה לא נותר זכר לאי-יציבות! כל ההתנהגות החדשה אפשרית כי תנאי השפה $\vec{v} = 0$ שהשתמשנו בהם בסעיף ב-ד לא נכון בפתח וסוף הצינור.

כדי לדבר במושג נוח שלצינור ארוך ואחיד והוא ישר. זה מאפשר להניח זרימה סטציונרית $\vec{V}_0(\vec{x})$ בכיוון x בלבד. הסימטריה ב-$\vec{X}$ מאפשרת לנו להפריד

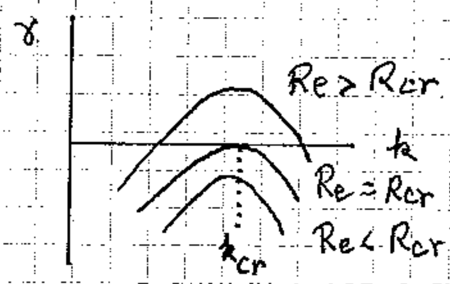
מהפונקציה $\vec{f}$ ב-(3.10) נפקטר רק e^{ikX}

$$(3.33)\qquad \vec{V}_1 = e^{i(kX - \omega t)}\,\vec{f}(Y,Z)\,; \qquad \vec{X} = \vec{x}/L$$

מספר הגל k הוא פרמטר נוסף בבעיה, כיוון שנשארנו עם בעיה דו-ממדית (y,z) כמו זו בסעיף ב, ולכן אפשר להסיק שישנן תדירויות עצמיות מרוכבות מהצורה

$$\omega = \omega_1(Re,k) + i\,\gamma(Re,k) \tag{3.34}$$

עבור Re קטן ה-γ תהיינה כולן שליליות וההפרעות תדעכנה. עבור Re קריטי מסוים R_{cr} תגיע ה-γ של אחת מה-k לאפס עבור ערך ספציפי של k, k_{cr}. ואם נעלה Re עוד קצת יהיה תחום של γ חיובי מסביב ל-$k = k_{cr}$.



כעת נצפה שההפרעה שהיא חבילת גל (עם תחום של k). אזי רכיבים שעבורם γ חיובי יתפתחו והאחרים ידעכו. אם Re רק קצת מעל ל-R_{cr} החבילה תהיה בסופו של דבר מורכבת מרכיבים עם k קרוב מאוד ל-k_{cr} בלבד. אבל ב-k_{cr}, $\partial\gamma/\partial k=0$. לכן ידוע רכיבים בחבילה

$$v_g \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k} \simeq \frac{\partial\omega_1}{\partial k} = \text{ממשות} \tag{3.35}$$

זאת תהיה מהירות החבילה; היא שונה ממהירות זרימת הרקע הסטציונרית.

אם v_g מספיק גדולה, אי-היציבות תסחף לפני שהיא מצליחה לגדול, ובכל נקודה קבועה במרחב ההפרעה לזרימה הסטציונרית תשכך ותדעך. אם v_g לא מספיק גבוהה, נראה גידול של ההפרעה בכל נקודה קבועה. במקרה הראשון האי-יציבות נקראת "הסעתית" ובמקרה השני "אבסולוטית".

בגלל השיקולים האלה נתבונן מנקודת ראות אחרת. נניח שאנחנו גורמים בנקודה מסוימת בזרימה להפרעה סינוסואידלית עם תדירות ω_0 (ממשית). כיצד זה מסתדר עם הצורה (3.34) (אנו מדברים עכשיו על כל הערכים של Re, לא רק R_{cr})? בהחלט שכדי ש-$\Im\omega$ תתאפס, יש צורך ש-k יהיה מרוכב! אם $\Im k>0$, לפי (3.33) ההפרעה קטנה בכוון x (יציבות) אבל אם $\Im k<0$ ההפרעה מתפתחת בכוון x (אי-יציבות). כך שעלינו לפתור במשוואה

$$\Im\,\omega(Re,k) = 0 \tag{3.36}$$

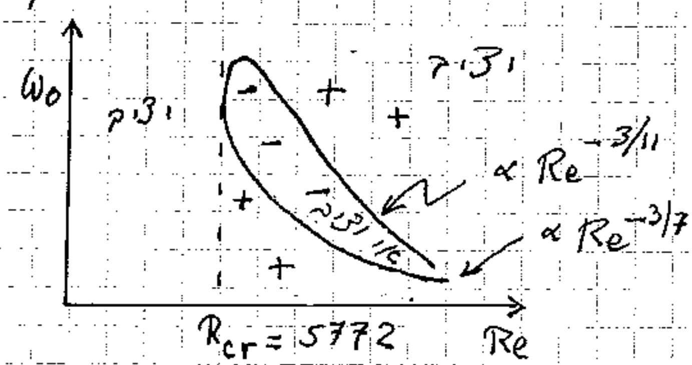
עבור k. בנוסף עלינו לקיים

$$\mathcal{R}\,\omega(Re, k) = \omega_0 \qquad (3.37)$$

אלה שתי משוואות הקובעות $\mathcal{R}k$ ו-$\mathcal{I}k$. מהשני נדע אם ישנה אי-יציבות לפי סימנו של

$$\mathcal{I}k = I(\omega_0, Re) \qquad (3.38)$$

<u>דוגמה 3.1</u> עבור זרימה תחת הפרש לחץ בין שתי פלטות מקבילות (תרגיל 2.1) חקירת האי-יציבות מלאה נעשה ע"י C.C. Lin. הבעיה קצת יותר מורכבת מהתאור שלנו בעמוד הקודם כי בגלל הסימטריה בכיוון z נותן להוסיף עוד אקספוננט כמו $e^{ik_z z}$ ל-(3.33). מסתבר, אבל שהאי-יציבות מופיעה בראשונה עבור $k_z=0$. לכן התאור כאן דומה הלכה למעשה. ונקבל שהסימן של $\mathcal{I}k$ הוא לפי

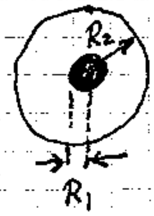


את Re מגדירים כתלות המהירות המקסימלית בזרימה הבלתי מופרעת כפול המרחק h בין הפלטות חלקי ν.

עבור $Re < 5772$ הזרימה יציבה לגמרי. כמו כן, עבור $h/U \gg \omega$. עבור ω_0 נמוכה יותר יש תחום סופי של Re שעבורו $\mathcal{I}k<0$ ולכן הזרימה בלתי יציבה שם. תחום ה-Re של אי-יציבות נעשה גדול עבור תדירות ω_0 מאוד נמוכה.

<u>תרגיל 3.1</u> מדוע יש לפרש האזור מימין ל-$Re=Re_{cr}$ כאזור של יציבות, ולא כאזור של אי-יציבות הסעתית?

<u>דוגמה 3.2</u> נתבונן לזרימת פואסויל כמו בדוגמה 2.2. חשבונות שנעשו במקרה של חתך עגול הראו בוודאות שכל האופנים סובלים מ תנודות (יציבות) לכל Re. כאן Re מוגדר כמהירות בציר הצינור כפול הרדיוס וחלקי ν. ויוצא ש-$R_{cr} = \infty$. מצד שני אם חתך הצינור הוא כזה



אז ישנו R_{cr} שבו ע מחליף סימן בפעם ראשונה. בכל המקרים ישנו מספר R'_{cr} ותחום

$$R'_{cr} < Re < R_{cr} \qquad (3.39)$$

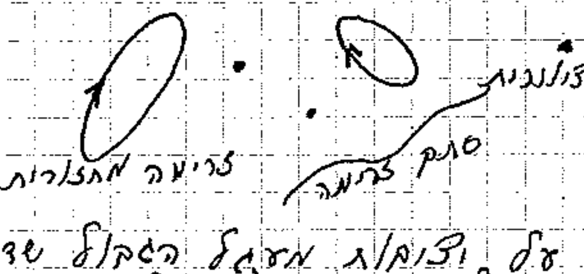
שבו האי-יציבות מופיעה דרך הפרעות סופיות (אי-יציבות קשה), כמו בסעיף ד'. עבור $Re < R'_{cr}$ כל הפרעה דועכת גם בזמן גם לאורך הזרימה. אם תוכנס טורבולנציה בתחום הזה היא תסתלק לאורך הצינור ותעלם. בתחום (3.39) הפרעות יגרמו כעבור זמן מה לטורבולנציה בכל הצינור. מדובר כאן בהפרעות סופיות (אי-יציבות קשה). מעבר ל-R_{cr}, כאמור, יש אי-יציבות גם לגבי הפרעות אינפיניטסימליות. ערכים טיפוסיים של R_{cr} הם בתחום של כמה אלפים.

---

1. הכפלת המחזור

בסעיף ג' למדנו איך אי-יציבות מתחילה מהפרעה מחזורית של הזרימה הסטציונרית. צ"א נוצרת זרימה מחזורית בזמן. כיצד הולכים מכאן לטורבולנציה מפותחת שאיננה מחזורית כלל ועיקר?

קודם כל נזדקק לתאור מופשט של מצב זרימה. נתאר לעצמנו מרחב של מצבי זרימה - כל נקודה בו שקולה לזרימה שלמה ברגע מסוים. זרימה סטציונרית היא נקודה במרחב הזה. זרימה משתנה בזמן היא מסלול שלם. זרימה מחזורית היא לולאה סגורה. זרימה סטציונרית היא נקודת גבול (limit point) וזרימה מחזורית היא מעגל גבול (limit cycle).



כעת נשאל על יציבות מעגל הגבול שדברנו עליו בסעיף ג'. מדובר על פתרון $\vec{V}_1$ של המשוואות עם מחזור $T_1 = 2\pi/\omega_1$. הפרעה $\vec{V}_2$ של זרימה מחזורית זו תקיים בדיוק משוואה (3.7) אבל עם $\vec{V}_1$ המחזורית במקום $\vec{V}_0$ הסטציונרית ו- $\vec{V}_2$ במקום ההפרעה $\vec{V}_1$. המשוואה היא ליניארית עם מקדמים מחזוריים בזמן. בגלל ש-$\vec{V}_2$ תהיה קטנה דיה, ולכן גם משוואה ליניארית. לפי משפט Floquet במשוואות דיפרנציאליות, מערכת כזו יש לה פתרונות מהצורה

$$\vec{V}_2 = \Pi \cdot e^{-i\omega t} \qquad (3.40)$$

כאשר Π הוא פונקציה מחזורית של $\tilde{t}$ עם מחזור הבסיסי T_1 (כמובן Π גם תלויה ב-$\tilde{x}$ וב-Re) יהיו כמה פתרונות כאלה, כל אחד עם ω שונה ועם פונקציה Π שונה. ה-ω תהיינה גם כן ערכים עצמיים כמו שהיו לנו בסעיף ב'. ובאופן כללי ה-ω תהיינה בד"כ מרוכבות.

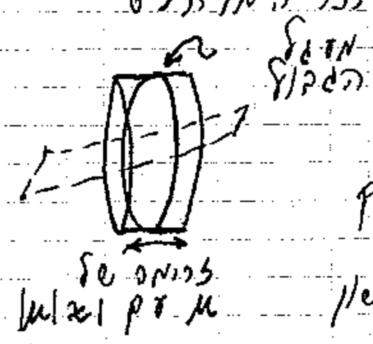
כעת הפקטור

$$\mu = e^{-i\omega T_1} \tag{3.41}$$

נקרא המכפיל של הפתרון עם ערך עצמי ω, צ"ל משך מחזור T_1 של הצרומה המחזורית המקורית, ההפרעה משתנה בפקטור μ. כאשר אחד מן הפקטורים μ יהיה גדול מאחד בערך מוחלט, תהיה הצרומה המחזורית שהתחלנו איתה בלתי יציבה שכן אחרי n מחזורים ההפרעה גדלה בפקטור $|\mu|^n$ שהולך ל-∞ כאשר n→∞. כל עוד כל ה-|μ| קטנים מאחד, תהיה הצרומה של מעגל הגבול יציבה.

כעת אם μ מרוכב, ישנו גם μ^* כי המשוואות ממשיות. זוג של מכפילים יעברו את המעגל $|\mu|=1$ ביחד. מסתבר, אבל, שיותר חשוב להבנת התחלת הטורבולנציה להבין מה קורה עם מכפיל שעובר המעגל $|\mu|=1$ כאשר $\mu=-1$. בזה נעסוק כאן.

נניח שיש בסך הכל n-ה מכפילים μ שונים. אז ביחד עם מעגל הגבול יש לנו יריעה n-מימדית במרחב המצבים בה שוכנות הצרומות האפשריות. בעצם אם n-2 מן המכפילים לא קרובים בערך מוחלט ל-1, ההפרעות שהם מייצגים תדעכנה אחרי כמה מחזורים T_1. לכן מסלול הצרומה בפועל יהיה תמיד קרוב ליריעה דו-מימדית שפורסים מעגל הגבול והכוון במרחב המצבים המתאים ל-μ שערכו המוחלט קרוב ליחידה.



נחתוך היריעה עם משטח כזה שכל סיבוב של מסלול הצרומה יחתוך אותו. החיתוכים העוקבים מוצבים מעין קו על המשטח ולאורך אותו קו נוכל לקבוע "קואורדינטה" x. כך החיתוך הראשון יהיה ב-x_1, השני ב-x_2 וכו'. מהדינמיקה נוכל לנבא את x_{j+1} מ-x_j אם ידוע לנו Re או בו מדובר. המפה

$$x_{j+1} = f(x_j, \mathrm{Re}) \tag{3.42}$$

נקרא מפת Poincare. יש בה מידע חשוב על התפתחות

הערה: יש לשים לב: מעגל הגבול מוצג כנקודה אחת x_* כי ברור שעל מעגל הגבול $x_{j+1} = x_j$. צ"א מעגל הגבול הופך להיות נקודת שבת בחתך של פואנקרה.

מעתה נגדיר מחדש את הקואורדינטה x כך ש $x_* = 0$. כמו כן נעשה התאמה בין x לעצב הגלגלי של הזרם כך שאם אין בהפרעה ממעגל הגבול $x_j = \xi$, אז $x_{j+1} = \mu\xi$. עדיין אני חופשי לבחור הסקאלה של x. זה נעשה בהמשך. ה μ מגיע לנקודה -1 עבור ערך מסוים של Re שנקרא R_1. נפתח סביב R_1:

$$\mu = -1 - k(Re - R_1) + \cdots \tag{3.43}$$

וברור ש $k > 0$. כעת נפתח מפת פואנקרה (3.42) עבור $|x_j|$ קטנה:

$$x_{j+1} = \mu x_j + \alpha x_j^2 + \beta x_j^3 + \cdots \tag{3.44}$$

ברור ממה שאמרנו קודם שמקדם האיבר הלינארי הוא אכן μ. הסיבה שמפת פואנקרה לא לינארית, ויש להמשיך בפיתוח מעבר לאיבר אחד, היא שהפתרון (3.40), וכל המשתנים ממנו, הנו קירוב לינארי כי הוא בא ממשוואה (3.7) שבה הזנחנו האיברים מסדר שני ב $\tilde{v}$. ברור שגם α וגם β תלויים בפונקציות של Re. אפשר לפתח אותן בדומה ל(3.43), אבל מסתבר שאם ניקח אותן בערך R_1 הדיוק מספיק. עם הצבת (3.43) יש

$$x_{j+1} = -[1 + k(Re - R_1)]x_j + \alpha x_j^2 + \beta x_j^3 + \cdots \tag{3.45}$$

כמו שציפינו $x = 0$ הוא נקודת שבת של מפה זו, ויציבה עבור $Re < R_1$, ולא-יציבה עבור $Re > R_1$: מעגל הגבול המקורי בעל המחזור T_1 נעשה בלתי יציב ב $Re = R_1$. רואים זה כאן כי עבור $|x_j|$ קטן מאוד, $|x_{j+1}|, |x_{j+2}|, \ldots$ הולכים וגדלים לפני שהאיברים הגבוהים יותר משפיעים.

כעת נעשה איטרציה פעם אחת של מפוי (3.45), צ"ל כותבים אותה נוסחה עם $j \to j+1$ ומציבים בתוצאה שוב את (3.45). החישוב ארוך אבל נרשום רק האיברים מסדר $O[(Re-R_1)x_j]$ ו- $O(x_j^3)$ שהוא הדיוק המקורי! המפה על פני זמן $2T_1$ הוא

$$x_{j+2} = [1 + 2k(Re - R_1)]x_j - 2(\alpha^2 + \beta)x_j^3 \tag{3.46}$$

גם כאן $x = 0$ הוא נקודת שבת, והיא יציבה עבור $Re < R_1$ כי המקדם של x_j הוא פחות מאחד. זה פשוט מאשר שמעגל הגבול המקורי יציב גם כשמסתכלים עליו בהפרשי זמן $2T_1$. עבור $Re = R_1$ המכפיל הוא עכשיו $+1$, כי $(-1)(-1) = +1$! אבל בעיקר כאשר $Re > R_1$ נקודת השבת בלתי-יציבה כי המקדם של x_j גדול מאחד. אבל עכשיו יש עוד זוג נקודות שבת

$$x_\pm \equiv \pm\sqrt{k\frac{Re-R_1}{\alpha^2+\beta}}\ ; \qquad \alpha^2+\beta>0 \tag{3.47}$$

ברור שנקודות שבת אלו מתאימות לשני מעגלי גבול עם מחזור $2T_1$. והמעגלים האלה יציבים. כי אם נכתוב, למשל, $x_j = x_+ + \xi$ ונציב ב-(3.46) נקבל

$$x_{j+2} = x_+ + \left[1-2(\alpha^2+\beta)x_+\right]\xi + O(\xi^2) \tag{3.48}$$

זה מראה שהסטיה מנקודת השבת מוקטנת לאחר זמן $2T_1$. אותו דבר לגבי הנקודה $x = x_-$.

מצאנו, אם כן, שמעגל הגבול המקורי התפצל לשני מעגלים עם מחזורים כפולים מזה של הראשון. צ"ל מפריעה מחזורית אחת מעל R_{cr} קבלנו ע"י bifurcation של הכפלת מחזור שתי צורות מחזוריות שונות עם מחזורים פי שנים מזה של המקורית. הפצול דרך הכפלת מחזור קרה ב-R_1. ההפרש בין שני המעגלים בעלי מחזור $2T_1$ קטן קרוב ל-$Re = R_1$ כפי שרואים מ-(3.47). יש להשוות (3.47) עם (3.31). האמפליטודה של מעגל בדרגה שניה גדלה לפי חוק דומה לזה עבור מעגל הגבול המקורי.

כמובן שכאשר עולה Re קצת, נעשה אחד מן שני מעגלי הגבול בלתי-יציב ב-$Re=R_2$, ואחר כך גם השני. ההשערה המבוססת על סימולציות וחישובים במערכות עם מספר דרגות חופש מועט, הוא שההפרש בין ה-R_j השונים הולך וקטן עד שאין-סוף פצולים מתרחשים בין R_1 ל-R_∞. מעבר ל-$Re=R_\infty$ אין מעגלי גבול וטורבולנציה מפותחת לגמרי הנה כל הספור.

לתסריט של פצולים עם הכפלת מחזור יש יתרון: ישנה תכונה של דמיונות שמופיעה באופן טבעי ללא קשר עם פרטי התסריט. אבל כאן לא נכנס לדרך שבה זה מדויק כאן.

5. טורבולנציה מפותחת היטב

טורבולנציה זאת פירושה שבכל נקודה $\vec{v}$ משתנה באופן אקראי לגמרי עם הזמן. אין כיום תאוריה שלמה של מצב כזה, אבל ישנו תסריט שנותן אינפורמציה חשובה. בו נעסוק כאן.

לא כל המהירות משתנה אקראית. למשל בזרם מהיר אפשר להבחין בין מהירות ממוצעת $\vec{U}$ וחלק הטורבולנטי. לכן תמיד נכתוב המהירות כ-$\vec{U}+\vec{v}$ כאשר הממוצע של רכיב הטורבולנטי מתאפס:

$$\langle \vec{v} \rangle = 0 \tag{3.49}$$

לפי הנחה וסדרת של טיילור, הממוצע כאן יכול להיות לפי זמן בנקודה קבועה או בזמן נתון על פני אזור נרחב. מניחים ששני הממוצעים שקולים.

נניח כאן זרימה תת-קולית, ולכן ש-ρ קבועה. משוואת שימור המסה אומרת ש

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{U}+\vec{v}) = 0 \qquad (3.50)$$

ממוצע על הזמן לאור (3.49) אומר ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=0$, ולכן נובע מ (3.50) שלמדויק ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ בכל רגע. כעת נרשום הצגת פוריה

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \iiiint_{-\infty}^{\infty} \vec{U}(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega \qquad (3.51)$$

ניתן לעשות זאת לכל פונקציה של $\vec{x}$ ו t. המשוואה $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ נותנת

$$0 = i\iiint \vec{k}\cdot\vec{U}(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\, d^3k\, d\omega \qquad (3.52)$$

משום שהצגת פוריה הינה יחודית למדויק ש

$$\vec{k}\cdot\vec{U}(\vec{k},\omega) = 0 \qquad (3.53)$$

המסקנה היא שלכל גל פוריה הזרימה ניצבת לכיוון התקדמות הגל (מהירות רוחבית). בזרימה כזו יש תמיד אלמנט של סבוב, ולכן ערבוליות היא חלק בלתי נפרד מזרימה טורבולנטית. מה שמיוחד הכי במה התסריט שרואה הטורבולנטיות כאוסף של אלמנטים של ערבוליות הנקראים אדוות (eddies). מבחינת אדווה היא חבילת גל. מה שמורכב (3.51) עם $\vec{k}$ בתחום צר, ולכן יש לה סקלה מוגדרת $2\pi/k \sim \lambda$.

האדוות הגדולות ביותר (k נמוך) הן בגודל L, הסקלה לשנוי המהירות U. יש אדוות בכל הגדלים λ קטנים ממנה, וניתן להבין האדוות הגדולות כמורכבות מאדוות קטנות יותר, וכן הלאה. סקלת המהירות לאדוות הגדולות היא ΔU, התנודה במהירות הממוצעת (לא U עצמה שתלויה במערכת הייחוס). לאדוות הקטנות יותר אפשר לייחס מהירות v_λ בהתאם ל $\vec{v}$ ב (3.51). כאן v_λ היא סקלת מהירות בסקלה המרחבית λ, כלומר על פני מרחק λ השנוי במהירות מסדר v_λ שנתרם בעיקר ע"י האדוות בגודל λ. אם כי בסקלה L הפלקטואציה של המהירות בערך דומה לתנודה ΔU על פני המרחק L, בסקלות קטנות v_λ כבר גדולה לעומת השנוי של U על פני מרחק λ. כל אדווה מבצעת "גלגול" בזמן $\sim \lambda/\Delta U$ הנקרא "turnover time".

כיוון שכל אדווה הינה זרימה בפני עצמה, ניתן להגדיר מספר ריינולדס לה

$$R_\lambda \equiv \frac{\lambda \tilde{v}_\lambda}{\nu} \qquad (3.54)$$

אמרנו שטורבולנציה מפותחת רק עבור Re גדול. הכוונה שם ל- $Re = LU/\nu$. בהנחה ש- ΔU אינה קטנה מאד לעומת U ה- R_λ של האדוות הגדולות יהיה גדול. אבל בזרימה עם מספר ריינולדס גדול אין בה השפעה רבה של הצמיגות (סעיף 1.2)! לכן הדיסיפציה שחייבת להתרחש בזרימה טורבולנטית כשהיא בלי מקורות אנרגיה חיצוניים (טורבולנציה דועכת) לא קורית ברמה של האדוות הגדולות. מצד שני הנסיון מראה ש- $\tilde{v}_\lambda$ קטנה כאשר λ קטנה ולכן לאדוות מספיק קטנות יהיה R_λ מסדר היחידה. בסקלה λ_0 הזו תבוא הדיסיפציה לידי ביטוי. המסקנה המתבקשת היא שהאנרגיה שמוכנסת ע"י מקורות חיצוניים מתחילה באדוות הגדולות ומתגלגלת בלי דיסיפציה לאדוות קטנות עוד ועוד קטנות עד שהשפעת הצמיגות בסקלה λ_0 הופכת אותה לחום. זו תמונתו של ריצ'רדסון.

→ הסקלה λ_0 נקראת סקלת Kolmogorov, L הוא הסקלה החיצונית. התחום $\lambda_0 \ll \lambda \ll L$ נקרא תחום האינרציאלי (inertial subrange) כי שם זרימת האנרגיה היא בלי הפסק.

כעת נדון בספקטרום הטורבולנציה, כלומר בפילוג של המהירויות לפי סקלה, הווי אומר תלות $\tilde{v}_\lambda$ ב- λ. זה קשור לצורת הפונקציה $\tilde{v}$ ב- (3.51). התאוריה של הספקטרום קשורה עם השמות קולמוגורוב + Obukhov. ההנחה היסודית היא של מצב טורבולנטי סטציונרי ואיזוטרופי. הכוונה לא שאין המהירות $\vec{v}$ משתנה בזמן או בכוון, אלא שבממוצע על פני זמן מסדר $L/\Delta U$ הזרימה נראית בלתי משתנה, ושעל פני אותו זמן ובמערכת הנוסעת עם $\vec{U}$ ה- $\vec{v}$ נראית מפולגת איזוטרופית. דרך אחרת לאמר זאת: פונקצית הפילוג ההסתברותית של רכיב של $\vec{v}$ אינה תלויה בזמן ושווה לכל רכיב. בסכום, הטורבולנציה היא במצב סטציונרי ואיזוטרופי רק סטטיסטית.

באיזה קצב הופכת אנרגיה לחום ליחידת מסה? נקרא לכמות הזו ϵ. אמרנו שהדיסיפציה מתבצעת בסקלה λ_0, האנרגיה הזו אבל באה מהסקלה החיצונית L בה לא מרגישים האפקטים של צמיגות. לכן סביר שניתן לבטא ϵ במונחים של הכמויות ΔU, L ו- ρ הרלבנטיות במשוואת נבייר-סטוקס כאשר האבר הצמיגותי זניח. הביטוי היחיד עם הממדים הנכונים L^2T^{-3} הוא

$$\epsilon \sim (\Delta U)^3/L \qquad (3.55)$$

אפשר להבין זאת גם כך: במערכת היחוס של הזורם ΔU הוא סדר המהירות ולכן $(\Delta U)^2$ סדר האנרגיה ליחידת מסה. על פני זמן הגלגול $L/\Delta U$ האנרגיה הזו "נשפכת" לאדוות בשלב הבא! הקצב של "זרימת" האנרגיה הוא לכן (3.55). כיוון שיש מצב יציב, אנרגיה תגיע בקצב כזה לסקלה λ_0, ולכן

(3.55) מסמל קצב הדיסיפציה.

בגוף התחום האינרציאלי עדיין של מרגישת הצמיגות. אנרגיה ליחידת מסה ϵ זורמת בקצב (3.55) מכל סקלה λ לסקלה קטנה יותר. גם כאן הכמויות הרלבנטיות הן רק λ, ρ ו- v_λ ומהן הכמות היחידה עם מימדי ϵ היא

$$\epsilon \sim v_\lambda^3/\lambda \qquad (3.56)$$

אם נשלוף ϵ בין שתי המשוואות נקבל

$$v_\lambda \sim \Delta U(\lambda/L)^{1/3} \qquad (3.57)$$

שהוא חוק קולמוגורוב-אובוכוב. הוא מאשר שהזרימה אטית יותר ככל שהסקלה קטנה יותר. מצב שבו v_λ גדולה לעומת הווריציה של U על פני המרחק λ שצריכה להיות מסדר $\Delta U\, \lambda/L$.

נחזור ל-(3.54) ונציב (3.57):

$$R_\lambda \sim \frac{\Delta U\, \lambda^{4/3}}{\nu L^{1/3}} \qquad (3.58)$$

מספר ריינולדס זה יורד לסדר היחידה בסקלה

$$\lambda = \lambda_0 \sim \frac{\nu^{3/4} L^{1/4}}{(\Delta U)^{3/4}} = L\,(Re)^{-3/4} \qquad (3.59)$$

כיוון שכדי שטורבולנטיות תופיע צריך Re באלפים, λ_0 די קטנה לעומת הסקלה החיצונית L, והולכת ונעשית קטנה יותר ככל ש-Re גדל. יש המקסימום שבו מסויק נוסחה זו. ב-$Re = R_{cr}$ מופיע אופן הבלתי יציב הראשון, לכן שם יכולה להתקיים רק אדוה אחת שגודלה L. נתקן (3.59) לכך:

$$\lambda_0 \approx \left(\frac{R_{cr}}{Re}\right)^{3/4} L \qquad (3.60)$$

בסקלת קולמוגורוב של הצמיגות כבר חשובה, אפשר לחשב קצב הדיסיפציה ליחידת מסה באותה סקלה עפ"י (2.82)

$$\epsilon = -\frac{1}{\rho V}\frac{dE_K}{dt} \sim \frac{\eta}{\rho}\sum_{ij}\overline{\sigma_{ij}'^{\,2}} \sim \nu\left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2\Big|_{\lambda=\lambda_0} \qquad (3.61)$$

כי σ_{ij}' הם גרדיינטים של מהירות. נציב כאן (3.57) ועבור λ נקח, כאמור, את (3.59) ונקבל (3.55) בהגדרה. אך קצב הדיסיפציה ברמה של אדוות הכי קטנות יש לו

הערה (3.59) בלי קשר לצמיגות.

כפי שאמרנו, בתחום האינרציאלי אין הצמיגות מורגשת. מה יקרה, אבל, אם נשתמש בהערכת הדיסיפציה כבר (3.61) ל-λ הרבה יותר גדולה מ-λ_ν? ברור שנקבל הערך הנכון רק אם נחליף ν בקבוע אחר $\nu_{turb,\lambda}$. מחשבים אותו כך

$$\nu_{turb,\lambda}\left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2 = \epsilon \sim \frac{(\Delta U)^3}{L} \qquad (3.62)$$

לאור (3.57)

$$\nu_{turb,\lambda} \sim \frac{\Delta U\, \lambda^{4/3}}{L^{1/3}} \sim \lambda v_\lambda \qquad (3.63)$$

נשווה זאת עם הנוסחה הקינטית (סעיף 2.ג) ש-ν מכפלה של מהירות המולקולות הממוצעת כפול מהלך החופשי הממוצע. במובן מסוים $\nu_{turb,\lambda}$ הינה הצמיגות שנוצרת בסקלה λ כתוצאה מהובלת תנע ע"י אדוות בגודל λ. בגבול $L \to \lambda$ מקבלים

$$\nu_{turb,L} \equiv \nu_{turb} = L\Delta U = \nu Re \qquad (3.64)$$

יש לפרש נוסחאות האלה כך: עקב טורבולנטיות התנגדות הזורם לתנועת גופים בתוכו הינה יותר גדולה ממה שמתבקש היה מהצמיגות המולקולרית ν בלבד. הסתכלות זו עוזרת רבות בהבנת תופעות שונות ביותר אסטרופיזיות, מטאורולוגיות והנדסיות.

<u>תרגיל 3.2</u> מהי ν_{turb} בסקלת קולמוגורוב? מה צריך להיות אופי הזרימה בסקלות קטנות יותר? קבל מזה קריטריון לתקפות התמונה של טורבולנטיות מפותחת שהוצגה כאן לעומק הדיון בסעיף קודם.

<u>תרגיל 3.3</u> שני חלקיקים שוחים בזרם טורבולנטי. ב-$t=0$ הם במרחק $L \gg \ell \gg \ell_0$ אחד מהשני. מהו חוק הגידול $\ell(t)$, במוחלט כאשר ℓ כבר גדול לעומת ערכו ההתחלתי? על פני איזה זמן נכון החוק שמצאת?

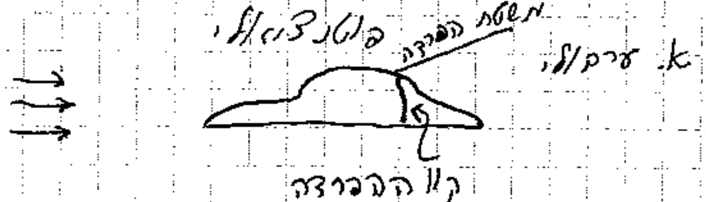
<u>תרגיל 3.4</u> בזרם טורבולנטי המהירות בנקודה אחת משתנה עם הזמן. תן הערכת סדר גודל של $\delta v_{\Delta t}$, ההפרש במהירויות במשך זמן Δt, המבוסס על תיאוריית האדוות.

ח. תופעת ההפרדה

על פי סעיף 2.ה' זרימה שמגיעה מאזור נטול ערבוליות תשאר נטולת ערבוליות. ז"א ניתן לתארה ע"י פוטנציאל

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \tag{3.65}$$

בכל אותו אזור. אבל באזורים בהם עוברים קווי זרימה שנגעו בדפנות, אז עברו בשכבת הגבול של דפנות, בהם תהיה ערבוליות (השווה הדיון בסעיף 2.ח'). כל האמור נכון גם כאשר הזרימה טורבולנטית: יש אזור ערבולי, ועשוי להיות אזור פוטנציאלי. המשטח המפריד בין השניים נקרא משטח ההפרדה. איפה שהוא נוגע בדפנות נוצרת עקומה הנקראת קו ההפרדה.



באזור הפוטנציאלי תקפה משוואת אוילר. כי את משוואת נביר-סטוקס ניתן לכתוב (עיין (2.84))

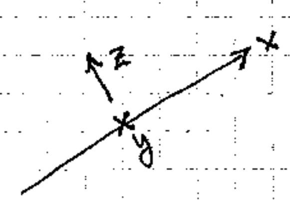
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = -\vec{\nabla}\left(\phi_N + \tfrac{1}{2}\vec{v}^{\,2} + p/\rho\right) + \nu\Delta\vec{v} \tag{3.66}$$

אם נציב (3.65) כאן נוכל לכתוב

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\left(\phi_N + \tfrac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + p/\rho - \nu\Delta\phi\right) \tag{3.67}$$

אבל כיוון שאנו מניחים זרימה בלתי-דחיסה, $\Delta\phi$ מתאפס, ולכן ה-ν נעלמת מה משוואה. לכן התוצאה לא שונה בכלום ממה שהיינו מקבלים אילו היינו מתחילים ממשוואות אוילר.

השאלה שעולה היא, אם אין צמיגות משפיעה באזור הפוטנציאלי, מנין הדיסיפציה שאמורה להחליש את האדוות הקטנות ביותר? כדי לענות נתאר לעצמנו שמשטח ההפרדה שטוח. בצד הפוטנציאלי שלו הווקטור $\vec{\nabla}\phi$ משיק למשטח, שהרי אחרת קווי זרימה ערבוליים היו חודרים לאזור הפוטנציאלי.



נעשה הצגת פוריה של ϕ לגבי הקואורדינטות x, y הפורשות את משטח ההפרדה

$$\Phi(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x\, dk_y\; \Phi(k_x,k_y,z)\, e^{i(k_x x + k_y y)} \tag{3.68}$$

כאן אנו מתעלמים מהזמן. כל פונקציה ניתנת לפריסת פוריה חלקית
כזו. משוואת לפלס נותנת

$$0 = \Delta\phi = \int dk_x\, dk_y \left[-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \Phi(k_x,k_y,z)\, e^{i(k_x x + k_y y)} \tag{3.69}$$

בגלל יחידות טרנספורם פוריה, האינטגרנד כאן חייב להתאפס:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi = \underbrace{(k_x^2 + k_y^2)}_{k^2}\Phi \tag{3.70}$$

הפתרונות הם

$$\Phi = F(k_x,k_y)\, e^{\pm kz} \tag{3.71}$$

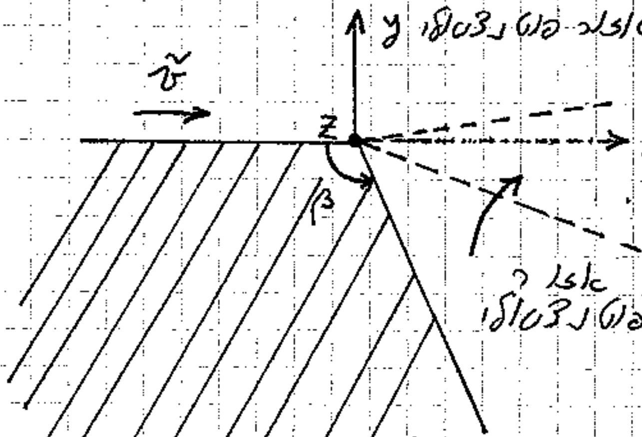
האקספוננט החיובי לא טוב כי ברור שהוא גורם למהירות $\vec{\nabla}\phi$ להתבדר ב $z\to\infty$, וזה לא פיסיקלי. למדנו ש-

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi = \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x\, dk_y \begin{Bmatrix} ik_x \\ ik_y \\ -k \end{Bmatrix} F(k_x,k_y)\, e^{-kz}\, e^{i(k_x x + k_y y)} \tag{3.72}$$

ויוצא שככל שאורך הגל של רכיב פוריה קטן יותר, תרומתו למהירות דועכת מהר יותר בכיוון z. כיוון שרכיב פוריה המתאים ל-k שייך, לפי המשוואה בסעיף 3, לאדוות עם גודל מקביל למשטח ההפרדה מסדר 1/k, הרי שככל שאדוות הן יותר קטנות, הן נעלמות מהר יותר עם מרחק מהמשטח. גודל האזור בצד הפוטנציאלי שבו עדיין ניתן למצוא אדוות בגודל $\lambda = 1/k$ הוא מסדר λ עצמו. לכן האדוות הכי קטנות, שהן בגודל η של קולמוגורוב, חודרות רק לעומק של $\sim\eta$ מעבר למשטח ההפרדה. ברוב האזור הפוטנציאלי אין אדוות שיכולות לגרום לדיסיפציה, ולכן אין דיסיפציה.

לאור האמור נכון לומר שבזרימה טורבולנטית ויש אזור פוטנציאלי שבו אינו באמת טורבולנטי כי לא קיימת בו ההרכבה השלמה של אדוות. בגלל הטורבולנטיות משטח ההפרדה עובר שינויים אקראיים - פעמים שנקודה מצויה בצד הטורבולנטי ופעמים שהיא בצד הפוטנציאלי, בגלל התנודות המתקדמות על הממוצע הזמני של המשטח כמשטח ההפרדה.

דוגמה 3.3



שני מישורים מודבקים במשופע בזווית β. לאורך העליון נושבת זרימה אחידה במהירות $\tilde{v}$. הנוזל מעבר לזווית הינו במנוחה מלכתחילה.

בתרגיל סמו מצאנו פתרון פוטנציאלי של משוואות אוילר לגאומטריה זו בו הזרימה עושה פניה בפינה וממשיכה מטה לאורך הדופן. כאשר יש צמיגות יש להשתמש במשוואות נביר-סטוקס, אבל מ $\rho, \eta, \tilde{v}, \beta$ (אין אורך טיפוסי בגאומטריה) לא ניתן לבנות מספר בלי ממדים דמוי מספר ריינולדס. לכן, אם כי הזרימה הפוטנציאלית שהזכרנו גם פותרת משוואות נביר-סטוקס (ראה (3.67)), אין פתרון זה יציב אף פעם (באופן פורמלי מספר ריינולדס ∞ כאן) ולכן הזרימה האמיתית תהיה טורבולנטית לכל $\tilde{v}$.

מכח ההתמדה הזרם העליון ממשיך קדימה ובעזרת הצמיגות סוחף איתו מן הנוזל במנוחה ומוסר לו תנע. כדי לספק מסה, הנוזל למטה מתחיל לנוע כלפי מעלה ומתמזג עם הזרם הראשי. התנגשות שני הזרמים נוצרת ערבוליות וטורבולנציה בין שני משטחי ההפרדה (מחוץ לשניהם הזרימה פוטנציאלית חוץ משכבות גבול לאורך שני הדפנות שהן מקור האמיתי של הערבוליות.

בבעיה ישנה סקלת אורך: $\nu/\tilde{v}$. היא נמצאת קטנה; עבור מים ($\nu = 10^{-2}\,cm^2s^{-1}$) ומהירות $\tilde{v}$ מספר מטר לשניה האורך נמצא $10^{-4}\,cm$. ברור שהיא אינה סקלת הזרימה בגדול. היא אינה סקלת האדוות הגדולות שאין הגאומטריה מגבילה אותה, ואמורה להיות בלתי תלויה מהצמיגות. האורך $\nu/\tilde{v}$ נותן את סקלת עובי משטחי ההפרדה ואת גודל האזור סמוך לקדקוד בו הזרימה וצורת משטחי ההפרדה תלויים בפרטים קטנים של הדפנות וצורת חבורם. הוא גם עשוי להגדיר את גודל האדוות הקטנות ביותר - הסקלה בה קורה הדיסיפציה.

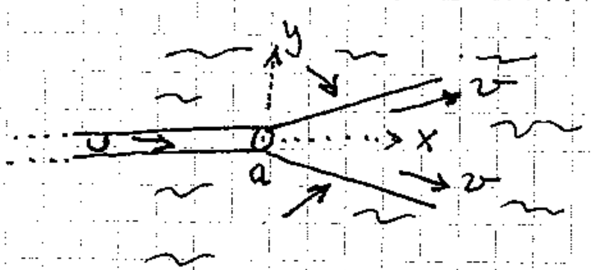
בהעדר סקלה L אי אפשר להסתמך על נוסחת קולמוגורוב - אובוכוב (3.57).

מהי צורה הכללית של משטחי ההפרדה? כאמור אין סקלה גדולה L. זה אומר שלמעט האזור הקרוב לקדקוד (שם הכל תלוי בפרטים קטנים), משוואות

משטחי ההפרדה תהיינה $y=\alpha_1 x$ ו- $y=\alpha_2 x$ (למעט קרוב למפגשם). כאן α_1, α_2 קבועים בלי ממדים שהם פונקציות של β בלבד כי הוא פרמטר חסר הממדים היחיד. נסיונות יוצא שעבור $\beta=90^\circ$ השפוע של משטח העליון הוא כ- 5° וזה של התחתון כ- -10°. בגבול $\beta\to 0$ שואפים שפועים אלה לאפס ונוצר הערבול מעלק! וכאשר β עולה מעל 90° ישנה זווית β קריטית בה מישור התחתון את משטח ההפרדה כך שיש מזווית β ומעלה רק זרם פוטנציאלי אחד ומשטח הפרדה אחד.

<u>תרגיל 3.5</u> כאמור באופן כללי ישנה זרימה מעלה לאורך המישור התחתון כאשר שם הזרימה פוטנציאלית. מה תהיה מהירות הזרימה לאורך מישור התחתון כפונקציה של פרמטרי הבעיה?

<u>דוגמה 3.4</u>



זרימה במהירות v בצינור נכנסת לתוך אמבט אין-סופי של אותו נוזל. פתח יציאת הצינור לאמבט הנו בגודל a.

ברור שבכוון הכללי של הצינור תמשיך הזרימה לתוך האמבט במהירות כלשהי $v(\vec{x})$. צורך שעמד יסתם (בגלל הצמיגות) כבתמונה. כתוצאה מערבול הזרמים תווצר ערבוליות בתוך משטח הפרדה בצורת חרוט.

שוב האורך ν/v אינו רלבנטי לזרימה בסקלה גדולה, בגלל שאסור שבטורבולנטיות ν תקבע תכונות של סקלות הגדולות. שוב, סביר ש- ν/v קובע עובי משטח ההפרדה. ושנו מספר ריינולדס: va/ν. לפי המשפט ק-3.ב' ידרש ערך מינימלי ל- va/ν כדי שתופיע הטורבולנטיות. גודל הפיה והאורך ν/v ישפיעו על צורה המדויקת של משטח ההפרדה בקרבת הפיה, אך כאמור במרחק גדול ממנה אסור ש- ν/v ישפיע ואפשר להניח שגודל הקטן a גם לא מופיע. מכאן שמשוואת משטח ההפרדה רחוק מהפיה תהיה $y=\alpha x$ עם α בלי ממדים. בעקרון α פונקציה של va/ν. בנסוי נמצא שלא כך, וזווית הפתיחה של החרוט הוא כ- 25° <u>תמיד</u>.

נקרא לקצב זרימת הנוזל בצינור Q_0. מדובר על נפח ליחידת זמן. כמובן שה- v שהשתמשנו בה קשורה ל- Q_0 לפי $Q_0 \sim va^2$. זוהי הזרימה בצינור שמספקת

התנע שבסילון הטורבולנטי. ותנע שמור. אם v מסמל סדר גודל המהירות באיזה מרחק x בסילון, הרי שצפיפות התנע בסילון הוא בקרוב

$$\Pi \sim \rho v^2 (\gamma x)^2 \qquad (3.73)$$

בהנחה שיש מצב עמיד, מספר זה חייב להיות בלתי תלוי ב x, ולכן

$$v \sim (\Pi/\rho)^{1/2} \frac{1}{\gamma x} \qquad (3.74)$$

כעת קצב זרימת הנפח דרך הסילון הוא $(\gamma x)^2 v$ כלומר

$$Q \sim (\Pi/\rho)^{1/2} \gamma x \qquad (3.75)$$

חוק זה טוב רק עד מרחק a בערך מהפיה (ב $x=0$) כי אנו יודעים שבקרבתה משטח ההפרדה לא "ישר". אבל שמור נפח דורש $Q(x=a) \sim Q_0$ ולכן $(\Pi/\rho)^{1/2} \sim Q_0/\gamma a$ כתוצאה

$$Q \sim Q_0 \frac{x}{a} \qquad (3.76)$$

אין להיות מופתע מזה שככל ש x גדל קצב הזרימה בסילון גודל — הרי הוא סוחב נוזל מהסביבה. מ (3.74) נובע עתה ש

$$v \sim Q_0 \cdot \frac{1}{\gamma^2 a x} \sim \frac{U}{\gamma^2} \frac{a}{x} \qquad (3.77)$$

מספר רינולדס במקום x הוא vx/ν. הוא קבוע! לכן

$$Re \sim \frac{Ua}{\gamma^2 \nu} \qquad (3.78)$$

בכל הסילון. לכן המעבר לטורבולנציה קורה בעת ובעונה אחת בכל הסילון כאשר Ua/ν עולה מעל לערך קריטי.

תרגיל 3.6 מהם חוקי המהירות האנלוגיים ל (3.76-77) עבור סילון היוצא מסדק קווי בדופן של מיכל גדול?

דוגמה 3.5

בסעיף ה.2 תארנו את הזרימה בתוך שובל למינרי

את הקשר בינה לבין כוח העילוי והתנגדות. כאשר המהירות v נעשית גדולה הופך השובל, בגלל חלקו הקרוב לגוף, לטורבולנטי. כאן נדון במקרה הזה.

השרטוטים הם כמו בעמ' 65,67. המהירות תהיה $\vec{U}+\vec{v}$ כאשר $\vec{U}$ (קבוע) היא המהירות הפוגעת בגוף ו-$\vec{v}$ הוא הסטיה ממנה, ולא הפלוקטואציה הטורבולנטית. לכן כאן $\langle\vec{v}\rangle$ אינה מתאפסת, ונסמלה סתם ב-$\vec{v}$. אפשר לסמוך על נוסחאות (2.165), (2.167) עבור התנגדות ועילוי. כי הן התקבלו מ-$\overleftrightarrow{\Pi}$ ע"י שימוש בחוק שימור המסה (2.158) ומשפט ברנולי (2.163) ביחד עם הזנחת איברים מסדר v^2 ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$. כל זה היה למצב סטציונרי. במקרה הטורבולנטי נניח טורבולנציה סטציונרית ונמצע כל הביטוי על הזמן. ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$ שזרקנו ממנו $O(v^2)$ נשאר בטל כמו בסעיף 2.ת אבל עם $\bar{v}$ הממוצעת במקום ה-$\vec{v}$ הסטציונרית שם. החוק (2.158) נכון כאן בממוצע. וחוק ברנולי (2.163) נובע ממיצוע המשוואה המקורית (1.111) כך שנקבל (2.164) כאשר נזניח $O(v^2)$. בדרך זו אנו משחזרים את (2.165) עבור כח ההתנגדות. לפשטות אין כאן נוסחה דומה (עילוי מתאפס).

יהיה $R(x)$ רדיוס השובל מרחק x מאחורי הגוף. שיפוע גבול השובל dR/dx חייב להתלכד עם הממוצע בזמן של קווי זרימה הטורבולנטיים התזוזה בוחרה (בגלל אצור הטורבולנטי ועירבולו). זהו משטח ההפרדה כאן. אצל קווי זרימה יש שיפוע v/U (בהנחה $U \gg v$) ולכן בסדר גודל

$$\frac{dR}{dx}\sim\frac{v_x}{U}; \qquad v_x\sim v_y \tag{3.79}$$

כעת מ-(2.165) נקבל

$$F_x\sim\rho U R^2 v_x \tag{3.80}$$

ומשתי אלה נבטל v:

$$\frac{dR}{dx}\sim\frac{F_x}{\rho U^2 R^2} \tag{3.81}$$

שנותן עם תנאי הגבול $R=0$ ב-$x=0$ ש-

$$R\sim\left(F_x x/\rho U^2\right)^{1/3} \tag{3.82}$$

שלא כמו (2.176) כאן רוחב השובל לא תלוי ב-ν (גדול Re כאן) והוא גדל יותר לאט עם x (שם זה היה $\sqrt{x}$). וכאן רוחב השובל תלוי מפורשות בכח ההתנגדות.

אם נציב (3.82) ב-(3.80) נקבל לבסוף

$$v_x\sim\left(F_x U/\rho x^2\right)^{1/3} \tag{3.83}$$

בניגוד ל-(2.178) כאן v לא יורדת כמו x^{-1} והיא לא פרופורציונית ל-F_x. לכן (3.82) ו-(3.83) מראים ש-$U \gg v_x$ שקולה ל-$R \ll x$ שבתנאי נכונה.

ט. משפט ז'וקובסקי

משפט של N. Zhukovski מ-1906 מתאים לעילוי של כנף, שמוגדר כגוף שהממד שלו ניצב לכוון הזרימה הפוגעת בו הוא קטן ביחס לשטח הצריך. כלומר:

המקרה המעניין הוא זה שבו הגוף לא סימטרי מעלה-מטה כך שהעילוי לא מתאפס. נניח בדיון שהאורך (המפתח wingspan) בכוון z אין-סופי.

אפשר לנצל הרבה מהדיון על שובלים למורבק מסעיף 2.ח'. שם הנחנו סטציונריות במערכת הגוף; כאן נניח טורבולנציה סטציונרית במערכת הכנף. כ"א באותה מערכת ה-$\vec{v}$ ב $\vec{v}+\vec{U}$ (המהירות הכוללת) אינו מתאפס בזמן, אבל לא מסמנים את ה-< >. יש לשים לב: $\langle\vec{v}\rangle$ לא מתאפס כי התלות ה $\vec{v}+\vec{U}$ שונה מזו בסעיף ג' בפרק זה.

בסעיף ב.ח' גזרנו נוסחה עבור העילוי (2.161) מטנזור המומנטום בהזנחת אחרי הצמיגות והאבר מסדר $\vec{v}^2$. במקרה הטורבולנטי הזנחת ν כמובן טבעית. בהנחה שהאיבוק בעל צורה אוירודינמית, $\vec{v}$ אכן תהיה קטנה לעומת $\vec{U}$ ונוכל להזניח $\vec{v}^2$. כתוצאה כאשר נמצע על הזמן, נקבל כאן אותה תוצאה כמו ב 2.ח', אבל עם ה-$\vec{v}$ הממוצעת במקום סתם $\vec{v}$ שם. לכן אנו יכולים להשתמש ב (2.161) כלשונה.

כמובן שהאינטגרל על משטח x_2 ב(2.161) נתאפס. כי בגלל אחידות הזרימה ב $x=-\infty$ (משפט (2.86)) ה-$\vec{v}$ הממוצעת לפני הכנף היא פוטנציאלית. כיוון $v_y=\partial\phi/\partial y$, האינטגרל על y ב-

$$F_y = \left(\iint_{x_2} - \iint_{x_1}\right) \rho U v_y \, dy \, dz \tag{3.84}$$

מתאפס ב $x=x_2$.

כאן אין אנו יכולים לצמצם האינטגרל על $x=x_1$ לאינטגרל על תחום השובל בלבד. בסעיף ב.ח' עשינו זאת ע"י הפיכת האינטגרל על x_1 לאינטגרל על לולאה מסביב לשובל. כאן השובל הוא אין-סופי בכוון z. אי-אפשר להקיפו בלולאה. כאן נכתוב מחוץ לשובל

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}; \quad \int_{y_2}^{\infty} v_y \, dy = -\phi(y_2) \tag{3.85}$$

$$\int_{-\infty}^{y_1} v_y \, dy = \phi(y_1)$$

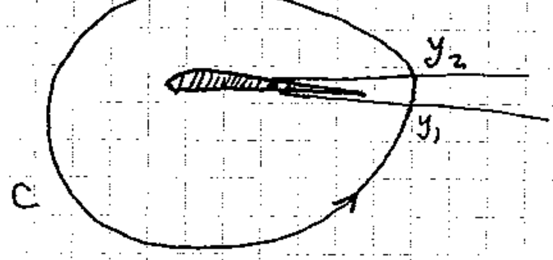
השתמשנו בתנאי גבול $\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0$.

בתוך השובל אין הזרימה פוטנציאלית, ולכן, כמו בשובלים למינריים, אי אפשר לפשט האינטגרל על y. אבל אפשר לטעון כאן שבגלל שהכנף דק, השובל יהיה דק. אין כל סיבה ש-v תהיה גדולה מאוד בשובל. אז בתנאי שמשטח x_1 אינו רחוק מדי מהכנף, ניתן להזניח תרומת השובל לאינטגרל ב-x_1 בהשוואה לתרומות ב-(3.85). נשארנו עם

$$F_y = \rho U \int [\phi(y_2) - \phi(y_1)]\, dz \tag{3.86}$$

כעת נסתכל על הסירקולציה מסביב לכנף:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\cdot d\hat{l} \tag{3.87}$$



חלק של האינטגרל מחוץ לשובל הוא פשוט $\phi(y_1) - \phi(y_2)$ כי ש-$\vec{\nabla}\phi = \vec{v}$. בגלל דקיקות השובל נזניח תרומתו לסירקולציה. אז כך

$$\Gamma \simeq \phi(y_1) - \phi(y_2) \tag{3.88}$$

ה-Γ תלויה ב-z לפי תלותה ב-z של $\phi(y_1)$ ו-$\phi(y_2)$. לכן

$$F_y = -\rho U \int \Gamma(z)\, dz \tag{3.89}$$

שהיא נוסחת ז'וקובסקי. רואים שרק עם סירקולציה מסביב לכנף נקבל עילוי.

ההבדל בין הדיון כאן לזה ב-3.2 נעוץ בעובדה שכאן פרופיל השובל מאותר אותו דמוי עיגול אלא מוארך כמעט דקצות שמאל וימין חסרות. לכן אי אפשר להגיע למסקנה שב-3.2 שהפוטנציאל אחיד בפריפריות השובל. כאן התחשבנו את השובל כאל משטח אי-רציפות של ϕ בעל עובי אפס.

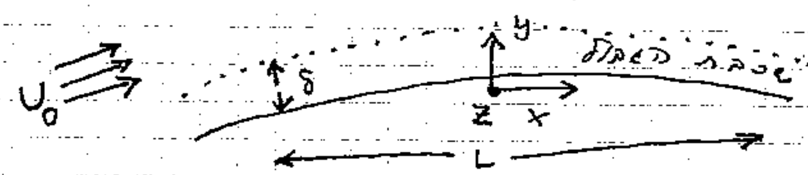
נסיים בהערה שאין הכרח בטורבולנציה כדי שמשפט ז'וקובסקי יעבוד. הוא עובד גם בזרימה למינרית סביב כנף, בתנאי שאפשר להתייחס אל השובל כדק.

ו. שכבת הגבול

נגיד שישנה זרימה בעלת Re גבוה בסמוך לדופן. נוצרת אז פרדוקסה. מצד אחד, משום ש Re גבוה, משוואת נביר-סטוקס מקורבת היטב ע"י משוואת אוילר. משוואה זו יש לה פתרונות אך תנאי הגבול הוא $v_\perp=0$ בדופן. כפי שהובהר בסעיף 2.2, אסור לדרוש תנאים על $\vec{v}_\parallel$ לגבי משוואת אוילר. ברור אז שהפתרון שנמצא יתן זרימה כלשהי מקבילה לדופן בקרבתה. זה נסתור את משוואת נביר-סטוקס כי היא דורשת תנאי $\vec{v}_\parallel=0$ על דופן ביחד עם $v_\perp=0$. לכן ישנה פרדוקסה.

L. Prandtl פתר הבעיה בהנחה שבכל זרימה במציאות, והיא Re גבוה כפי שיהיה, ישנה שכבת נוזל בסמוך לדופן שאפקטים של הצמיגות חשובים בה. הירידה של $\vec{v}_\parallel$ מערכה לפי משוואת אוילר לאפס על הדופן קורת כולה בתוך שכבת הגבול (boundary layer) הזו. ברור שיש לטפל בזרימה בתוך שכבת הגבול עם משוואות נביר-סטוקס המלאה, על אף מספר ריינולדס הגבוה.

פרנדטל נתן תאוריה הקובעת מבנה ועובי שכבת הגבול. נניח כאן לצורך פשטות שהדופן הוא בעל פרופיל שלא תלוי בקואורדינטה z.



כמו כן נניח שהזרימה $\vec{v}$ אינה תלויה ב-z או בזמן. L מסמלת סקלת האורך של שינוי כיוון הדופן או, אם הדופן שטוח, של שינוי המהירות U בתוך הזרם ע"פ משוואת אוילר. בקרבתו של הדופן זהו קירוב טוב לראות אותו כשטוח על פני מרחקים מסדר L, ולכן נשתמש בקואורדינטות קרטזיות כבציור.

כדי לכתוב משוואות פשוטות נניח ש $v_z=0$ בכל מקום; זה קונסיסטנטי עם סימטרית הבעיה. מקבלים

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{3.90}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.92}$$

עובי שכבת הגבול הוא δ, אנו מניחים ש- $\delta/L \ll 1$.
ברור ש v_x תהיה מסדר U_0 כאשר v_y יהיה דומה ל $U_0\delta/L$.
שינוי בכיוון x הוא לאורך על סקלה L ואילו בכיוון y על
סקלה δ. לכן כדאי להגדיר משתנים נטולי ממדים
X, Y, V_x, V_y (שהם גם מסדר היחידה, בוחר עם
הנגזרות $\partial V_x/\partial X$ וכו')

$$X \equiv x/L \quad Y = y/\delta, \quad V_x = v_x/U_0, \quad V_y = \frac{L}{\delta}\frac{v_y}{U_0} \tag{3.93}$$

משוואות (3.90-91) הופכות ל- (הגדרנו $R_e \equiv LU_0/\nu$)

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho U_0^2}\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{R_e}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2}} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}\cdot\frac{L^2}{\delta^2}\right] \tag{3.94}$$

$$\frac{\delta}{L}\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial Y}\right) = -\frac{L/\delta}{\rho U_0^2}\frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\delta/L}{R_e}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2}} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2}\cdot\frac{L^2}{\delta^2}\right] \tag{3.95}$$

ברור שהאיברים המסומנים עם תחתיהם זניחים בהשוואה
לאחרים. השוואה של שתי המשוואות מראה ש

$$\left|\frac{\partial p}{\partial Y}\right| \sim \left|\frac{\partial p}{\partial X}\right|\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \tag{3.96}$$

ולכן עד סדר $O(\delta/L)$ יש לכתוב במקום (3.95)

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \tag{3.97}$$

כמובן שהתלות זו מוצדקת רק בתוך שכבת הגבול. הוא אומרת
שבתוך השכבה הלחץ הוא אותה פונקציה $p(X)$ שבזרימה מחוץ
ליד השכבה.

נניח שנמצא הפתרון של משוואת אוילר המתאימות לתנאי
גבול $v_\perp = 0$ בדופן. פתרון זה נותן לנו הפונקציות $\vec{U}(\vec{x})$
ו- $p(\vec{x})$ בזרימה החופשית. בגלל שהזרימה מתקרבת מזרימה
אחידה עם מהירות U_0, הזרימה לפי אוילר פוטנציאלית,
ויש עבורה משפט ברנולי מהסוג של:

$$\frac{1}{2}\vec{U}^2 + p/\rho = \frac{1}{2}U_0^2 + p_0/\rho \tag{3.98}$$

מכאן שאפשר להציב ב (3.94) $U\frac{\partial U}{\partial X}$ במקום $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X}$.

עכשיו שעובי שכבת הגבול הוא δ, אני מניח ש- $\delta/L \ll 1$.
ברור ש v_x תהיה מסדר U_0 כאשר v_y יהיה דומה ל $U_0\delta/L$.
שינוי בכיוון x קורה על סקלה L ואילו בכיוון y על סקלה δ. לכן כדאי להגדיר משתנים נטולי ממדים X, Y, V_x, V_y (שהם גם מסדר היחידה, ביחד עם הנגזרות $\partial V_x/\partial X$ וכו')

$$X \equiv x/L \quad Y = y/\delta, \quad V_x = v_x/U_0, \quad V_y = \frac{L}{\delta}\frac{v_y}{U_0} \tag{3.93}$$

משוואות (3.90-91) הופכות ל- (הגדרנו $R_e \equiv LU_0/\nu$)

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho U_0^2}\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{R_e}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2}} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2}\cdot\frac{L^2}{\delta^2}\right] \tag{3.94}$$

$$\frac{\delta}{L}\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial Y}\right) = -\frac{L/\delta}{\rho U_0^2}\frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\delta/L}{R_e}\left[\underbrace{\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2}} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial Y^2}\cdot\frac{L^2}{\delta^2}\right] \tag{3.95}$$

ברור שהאיברים המסומנים עם ~ תחתיהם זניחים בהשוואה לאחרים. השוואה של שני המשוואות מראה ש

$$\left|\frac{\partial p}{\partial Y}\right| \sim \left|\frac{\partial p}{\partial X}\right|\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \tag{3.96}$$

ולכן עד סדר $O(\delta/L)$ יש לכתוב במקום (3.95)

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \tag{3.97}$$

כמובן שהתלות זו מוצדקת רק בתוך שכבת הגבול. היא אומרת שבתוך השכבה הלחץ הוא אותה פונקציה $p(X)$ שבזרימה מחוץ ליד השכבה.

נניח שנמצא הפתרון של משוואת אוילר המתאים לתנאי גבול $v_\perp=0$ בדופן. פתרון זה נותן לנו הפונקציות $\vec{U}(\vec{x})$ ו- $p(\vec{x})$ בזרימה החיצונית. בגלל שהזרימה מתקרבת מזרימה אחידה עם מהירות U_0, הזרימה לפי אוילר פוטנציאלית, ויש עבורה משפט ברנולי מסוג שני:

$$\frac{1}{2}\vec{U}^2 + p/\rho = \frac{1}{2}U_0^2 + p_0/\rho \tag{3.98}$$

מכאן שאפשר להציב ב (3.94) $U\frac{\partial U}{\partial X}$ במקום $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X}$.

נגדיר משתנים חדשים

$$\tilde{X} = X \qquad \tilde{Y} = Y\sqrt{Re}\,\frac{\delta}{L} \qquad \tilde{U} = U/U_0$$

$$\tilde{V}_x = V_x \qquad \tilde{V}_y = V_y\sqrt{Re}\,\frac{\delta}{L} \tag{3.99}$$

בעזרת אלה משוואות (3.22) ו- (3.94) נוטלות הצורה

$$\frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{X}} + \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial \tilde{Y}} = 0 \tag{3.100}$$

$$\tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{X}} + \tilde{V}_y \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial \tilde{Y}} - \frac{\partial^2 \tilde{V}_x}{\partial \tilde{Y}^2} = \tilde{U}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{X}} \tag{3.101}$$

בנוסף עם (3.97) אלה הן משוואות פרנדטל. כיוון ש Re לא מופיע בהן הפתרון $\tilde{V}_x, \tilde{V}_y$ עבור $\tilde{U}$ נתונה יהיה אותו פתרון לכל Re, נאמר כאן דמיוניות. ככל שמגדיל Re פרופילי v_x ו- v_y לפי y ו- x ישארו ללא שינוי, רק הסקלה בכיוון y משתנה (כי צאת בכיוון x לא נוגעת Re או δ עפ"י הטרנספורמציות (3.93) ו- (3.99)).

מכיוון ש $\tilde{V}_x, \tilde{V}_y$ באות ממשוואות נטולות כל פרמטר קטן או גדול, ותנאי השפה $\tilde{V}_x = \tilde{V}_y = 0$ בדופן הוא ללא סקלה, אנו מצפים ש $\tilde{V}_x$ ו- $\tilde{V}_y$ תהיינה מסדר היחידה כאשר הנקודה לא ממש על הדופן. כמו כן מצפים שעובי השכבה $\Delta\tilde{Y}$ יהיה מסדר היחידה. מכאן ש

$$\delta \equiv \Delta y = \delta\Delta Y = L\Delta\tilde{Y}/\sqrt{Re} \sim L/\sqrt{Re} \tag{3.102}$$

$$v_y = \frac{\delta}{L}U_0 V_y = U_0\frac{\tilde{V}_y}{\sqrt{Re}} \sim \frac{U_0}{\sqrt{Re}} \tag{3.103}$$

מקבלים אישור שהשכבה דקה עבור מספר ריינולדס גדול, ושמהירות v_y קטנה במס δ מ v_x שצריכה להיות מסדר U_0.

<u>דוגמה 3.6</u>

מהו עובי שכבת הגבול קרוב לנקודת סטגנציה?

מחוץ לשכבה נוכל לכתוב $U = Cx$. ב (3.90) נשער כי $v_x \sim Cx$ ו- $v_y \sim v_x \frac{\delta}{x}$. במקום גזירה לפי x נחלק ב x ובמקום גזירה לפי y נחלק ב y. ה $\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ זניח. במקום $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ נכתוב $U\frac{\partial U}{\partial x} \sim C^2 x$ ונקבל $\delta \sim \sqrt{\nu/C}$. טוב, וזאת כמו שהיה אפשר לנחש.