2. זרימה 3 מימדית

א. הצורך בתיקון משוואות אוילר

עפ"י תרגיל 1.7, כאשר הגוף נע במהירות קבועה בנוזל אידיאלי בלתי-דחיס שנמצא מלכתחילה במנוחה, כדור כזה אינו מרגיש כל התנגדות לתנועתו. זוהי דוגמה של פרדוקס ה-d'Alembert. התופעה לא תלויה בצורת הגוף. כי אם הזרימה פוטנציאלית (תנאים אחידים ב-∞ ומשפט קלווין) הרי שפוטנציאל המהירות ϕ בא ממשוואת לפלס (פסו.ו.)! פתרון אחד שלה הוא $\phi = a/r$ כאשר a יכולה להיות תלויה בזמן ואנו משתמשים בקואורדינטות פולריות כדוריות. ברור שכל נגזרת של פתרון זה הוא פתרון. למשל $\vec{\nabla}$ ו-r הוא פתרון משוואת לפלס. לכל וקטור $\vec{A}(t)$ יש לנו, אם כן, הפתרון

$$\phi = \frac{a(t)}{r} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} \tag{2.1}$$

היינו צריכים ה-$\vec{A}$ כאן כי ϕ הוא סקלר. הפתרון הזה מתאים ל-

$$\phi = \frac{a}{r} + \sum A_j \frac{Y_{1j}}{r^2} \tag{2.2}$$

שאנו מכירים בתחילת הפיתוח של פתרון משוואת לפלס בהרמוניות הספריות. לכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$\phi = \frac{a(t)}{r} + \vec{A}(t)\cdot\frac{\hat{r}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{2.3}$$

נחשב את הזרימה של מסה החוצה מכדור בעל רדיוס R מסביב לגוף הנע.

$$\oint \rho\,\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{S} = -\rho a\int\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{S} = -4\pi\rho a \tag{2.4}$$

הגורמים הנוספים ב-(2.3) לא תורמים. כיוון שהגוף הנע הולך והולך, אין סיבה שתהיה זרימה החוצה במרחק גדול ולכן חייבים להסיק $a=0$.

(11)

בפתרון (2.3) עם $a=0$, $\vec{A}$ צריך להיות לינארי במהירות $\vec{u}$ של הגוף, ויהיה תלוי בצורתו! לא מעניין לחשב $\vec{A}$ כאן. כיוון שהנוזל אידיאלי, כל צורך להפעיל כח על הגוף כדי להתגבר על התנגדות (חיכוך) לתנועה יכול לקבל כח מהפסדי אנרגיה ע"י שטף אנרגיה קינטית אל פנימית של הנוזל החוצה. תנועות אנרגיה קוונטית בקרבת

בגוף, אבל השאלה, אם אנרגיה נטו הולכת לאבוד למרחקים גדולים.
ע"פ (1.170) אבוד האנרגיה למרחקים ודוק

$$\frac{dE}{dt} = -\oint_R \rho \vec{v}\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}^2 + h + \phi_N\right)\cdot d\vec{S} \qquad (2.5)$$

לפי (2.3) $\vec{v} \sim \frac{1}{r^3}$. אנו מצפים ש ϕ_N וקטן, וש h ושאר ערכו בגודל הולך ומפרע. לכן האינטגרל מתאפס כמו $R/1$. זה מוכיח שאין התנגדות לתנועת הגוף - פרדוקסת ד'אלמבר.

כיוון שלפי הנסיון ישנה כן התנגדות, אפילו כאשר אמפט בגודל גדול ואופקטים של משט חום צמיגות, הרי שתאור ההידרודינמיקה עד כאן לוקה בחסר. מה יש לתקן? בוודאי לא חוק שמור המסה שמדויק עד שמגיעים ליחסות. התקון צריך להעשות, אם כן, במשוואת אוילר. מה שחסר בה הוא כח שמקורו חכוך בזרם, או צמיגות כמו שקוראים לזה במקצוע.

ב. צמיגות ומשפט סטוקס של פרוק גרדינט המהירות

מה שרוצים זה להוסיף לצד $\rho\vec{a}$ - כח צמיגות ב(1.38). במה תלוי כח זה? בוודאי שבמהירות הזרם. אם $\vec{v}=0$ אין מקום לחכוך שכן אין אנרגיה קינטית שאפשר לגרום לה להפוך לחום בתהליכי דיסיפציה. אבל במערכת שבה מהירות אחידה גם לא היה כח צמיגות. כי אם עוברים למערכת מעמת הזרם הכח יעלם בהגדרה, אבל כח שאפשר כך לאפס אותו, לא יגרום לאבוד אנרגיה הדרוש. אזי כח הצמיגות תלוי בנגזרות של $\vec{v}$.

מסקנה זו מתיישבת עם התמונה המיקרוסקופית של צמיגות. צמיגות נוצרת כי חלקיקים עוברים מאלמנט האחד לשכנו. אם ישנה תנועה יחסית בין השנים, החלפת החלקיקים פרושה הובלת תנע מאלמנט לאלמנט, ואבוד התנע יכול להתפרש כתוצאה מחכוך - צמיגות.

מטרתנו עתה לבנות כח החכוך ליחידת נפח מנגזרות המהירות. אבל לא כל תשעה הרכבים [illegible] ויש להם נגיעה לצמיגות. כדי למצוא הרלבנטים, [illegible] הפרוק של סטוקס. ניקח $\vec{v}(\vec{x},t)$ ונחשב

$$\delta v_i = v_i(\vec{x}+\vec{r},t) - v_i(\vec{x},t)$$

כאשר $\vec{r}$ קטן זה שווה ל

$$\delta v_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} r_k \qquad (2.6)$$

אפשר לכתוב כזהות

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)}_{\equiv E_{ik}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)}_{\text{רכיבים של ערבוליות } \vec{\omega}} \tag{2.7}$$

אפשר לבדוק ש-

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) r_k = \left[(\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{r}\right]_i \tag{2.8}$$

על כן

$$\delta\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\times\vec{r} + \overleftrightarrow{E}\cdot\vec{r} \tag{2.9}$$

כאשר $\overleftrightarrow{E}$ הוא הטנזור שרכיביו הם E_{ik}. הוא סימטרי. הצלה. מתבונן על רכיבים האלכסונים של $\overleftrightarrow{E}$. ברור ש

$$\sum_k E_{kk} = \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{2.10}$$

יש לזכור שעקבה של טנזור אינוריאנטית תחת סיבובים. לכן כדאי להגדיר טנזור חדש

$$\overleftrightarrow{\sigma} = 2\overleftrightarrow{E} - \frac{2}{3}\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{2.11}$$

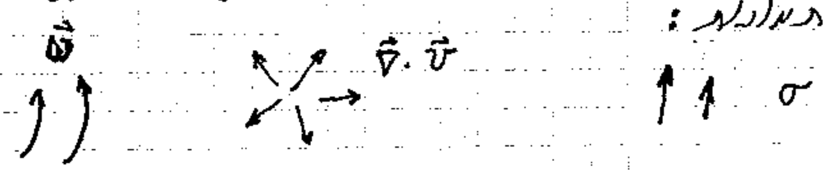
שהוא באופן ברור נטול עקבה. אז

$$\delta\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\times\vec{r} + \frac{1}{2}\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{r} + \frac{1}{3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\,\vec{r} \tag{2.12}$$

הפרוש של האבר האחרון כאן מתקבל מ- (1.35)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \equiv -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \tag{2.13}$$

זאת אומרת התרומה השלישית ל $\vec{v}$ נובעת מ"נפח" הגורם. לטנזור $\overleftrightarrow{\sigma}$ קוראים "הגזירה" (shear). נמצא שהתנועה היחסית בין שתי נקודות בגורם מורכבת מסיבוב, גזירה ונפח ותו לא. הגזירה היא אותו חלק שלא קשור עם סיבוב קשיח ולא עם נפח. התנועה דומה לזו של פיסת נייר הנתונה לגזירה ע"י מספריים. בתמונות:



החלק $\vec{\omega}$ של נגזרות המהירות אינו קשור עם חכוך. למשל דלי מלא מים ומסתובב בתדירות $\vec{\Omega}$ מגיע למצב בו כל המים בעלי תדירות $\vec{\Omega}$. לפי (1.49) $2\vec{\Omega}=\vec{\omega}$ בכל נקודה במים. ברור שאין שם גזירה ואין נפיחה בתנועה. ידוע גם שבמצב סבוב כזה אין חכוך. לכן תקונים למשוואות אוילר יהיו קשורים רק עם הנפיחה והגזירה של שדה המהירות.

6. משוואות נביר-סטוקס

משוואות אוילר נוכל לכתוב בצורה (1.182) שהוא חוק שמור תנע במתכונת משוואת רציפות. כח ההידרודינמי $\vec{\nabla}p$ בא כדיברגנץ של חלק מ-$\overleftrightarrow{\Pi}$, וכח הגרביטציוני $\rho\vec{\nabla}\phi_M$ בא כדיברגנץ של $\overleftrightarrow{T}$. לכן צריך ויעלה לקבל את הכח החכוך שמתאים למשוואה הבאה במקום זו של אוילר הוא להוסיף ל-$\overleftrightarrow{\Pi}$ תרומה מהצמיגות, כלומר טנזור מאמץ צמיגותי. טנזור זה חייב להיות מורכב מ-$\overleftrightarrow{\sigma}$ ו-$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ כי החלק השלישי של גרדינט $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, לא צריך להופיע. כיצד בונים טנזור המאמץ הצמיגותי? הקומבינציה

$$-\eta\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{2.14}$$

הוא בפרוש טנזור ויכול להיות מחובר בחוק הטנזור המקורי מבחינת תכונות הטרנספורמציה שלו. כל מה שדרוש הוא ש-η ו-ζ תהיינה פונקציות סקלריות. עוד טנזורים מתקבלים הנבנים מהכפלות של $\overleftrightarrow{\sigma}$ עם עצמו, או עם $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,\overleftrightarrow{I}$. אבל אם $\vec{\nabla}\vec{v}$ קטן, אלה יהוו בגדר תקונים מסדר גבוה לתרומה הבסיסית (2.14). לכן, בהסתייגות שגרדיאנט המהירות משתנה לא מהר נכתוב

$$\overleftrightarrow{\Pi}=\rho\vec{v}\vec{v}+\overleftrightarrow{I}p-\eta\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{2.15}$$

(12)

נציב זה בחוק שמור התנע (1.182) ונקבל (השווה עם משוואות אוילר)

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p-\rho\vec{\nabla}\phi_M+\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})+\vec{\nabla}\cdot(\zeta\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{2.16}$$

עפ"י את ההגדרות (1.173)-(1.175)

$$\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})=\vec{\nabla}\eta\cdot\overleftrightarrow{\sigma}+\eta(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}) \tag{2.17}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\zeta\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v})=\vec{\nabla}\zeta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})+\zeta\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{2.18}$$

לא נכתוב את מלוא הבטוי במקרה הכללי. ה-η ו-ζ הן תכונות תרמודינמיות של החמר הזורם. η נקראת הצמיגות

הדינמית η ו-ζ הצמיגות השניה. ככמויות תרמודינמיות הן תלויות פונקציות של, למשל, T ו-ρ. בהרבה מקרים $\vec{\nabla}\eta$ ו-$\vec{\nabla}\zeta$ לא גדולים, ואפשר להזניח אברים עם $\zeta\vec{\nabla}$ ו-$\eta\vec{\nabla}$. אם נעשה זאת וניקח בחשבון שלפי (1.17)

$$(2.19)\quad (\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma})_i=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\sum\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)$$

$$=\Delta v_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\Delta v_i+\frac{1}{3}\frac{\partial\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}{\partial x_i}$$

לכן המשוואה (2.16) לוקחת הצורה

$$(2.20)\quad \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p-\rho\vec{\nabla}\phi_N+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{1}{3}\eta\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

זאת נקראת משוואת Navier-Stokes. במקרה של זרימה בלתי דחיסה האבר האחרון נופל ורק η (לא ζ) מופיעה.

התורה הקינטית מראה ש-$\eta\sim\rho\bar{u}\lambda_{mol}$ כאשר λ_{mol} הוא אורך נתיב חופשי ממוצע מ-(1.2) ו-$\bar{u}$ הוא מהירות הממוצעת של חלקיקי הגז. כיוון ש-λ_{mol} פרופורציונית הפוך לצפיפות הרי ש-η לא כל כך תלויה בצפיפות החומר. בגז המהירות $\bar{u}$ הוא

$$(2.21)\quad \bar{u}\sim\sqrt{\frac{kT}{m}}$$

כאשר m מסת החלקיקים. לכן בגז

$$(2.22)\quad \eta\sim\frac{\sqrt{mkT}}{\sigma}$$

העובדה שאין η תלויה בצפיפות כי רק בטמפרטורה נבדקה בניסויים ע"י מקסוול לאחר שהוכיח מהניבוי התאורטי (2.22). מקובל להגדיר את הצמיגות הקינמטית כך

$$(2.23)\quad \nu=\eta/\rho$$

שימו לב כי זה מה שמופיע במשוואות נביר-סטוקס כאשר מחלקים ב-ρ. לגבי ζ יש לציין שבגז מונואטומי (כמו הליום, למשל), ζ מתאפסת בקירוב. מטעם זה נוטים להתרכז בעיקר עם η במשוואות נביר-סטוקס.

ב. צמיגות ותנאי גבול

למשוואות אוילר התנאי גבול על המהירות באובייקט מוצק היה (1.42) - רק רכיב המאונך של $\vec{v}$ מתאפס. אילו היינו דורשים $\vec{v}=0$ בגבול אזי המשוואה הייתה קובעת (הזנח $\vec{\nabla}\phi_N$

שהדרישה $\vec{v}$ כולו מתאפס על הדופן. אבל אין סיבה פיסיקלית לזה. ברגע שמתירים $v_\parallel \neq 0$ הבעיה לא מתעוררת. לכן לא היה קונסיסטנטי להניח $v_\parallel = 0$. העניין קשור עם דרגת משוואת אוילר - דרגה ראשונה בנגזרות. כי נגיד שהיינו גם דורשים $v_\parallel = 0$. זה אומר שכל נגזרת משיקה של $\vec{v}$ מתאפסת. לפי תורת המשוואות החלקיות, תנאים על נגזרות המשתנה מותר לקבוע רק אם המשוואה היא מסדר שני.

משוואות נביה-סטוקס היא מסדר שני - יש בה $\Delta\vec{v}$. לכן מטעמים מתמטיים שדורש התאפסות של נגזרות ראשונות של $\vec{v}$ קונסיסטנטי אם כן לדרוש ש $\vec{v}$ כולה תתאפס על דופן. הבסיס הפיסיקלי לדרישה הוא שכוחות מולקולריים תמיד יגרמו לאותה שכבה של נוזל שנוגעת בדופן להדבק אליו. התנאי

$$\vec{v} = 0 \tag{2.24}$$

נקרא "הנוזל נדבק לגבול". כמובן, אם הגבול נע, מהירות הנוזל $\vec{v}$ תהיה זהה לזו של הגבול.

הצמיגות משנה הכלל שהכח על דופן במגע עם הנוזל הוא הלחץ כפול השטח". כמו ב-(1.184) שטף התנע בכוון $\hat{n}$ הקשור עם הנוזל עצמו הוא

$$\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\hat{n}$$

ועכשיו התרומה של $\vec{v}\vec{v}\rho$ היא פשוט העברת התנע בגוף של הנוזל. לכן הכח ליחידת שטח בכוון $\hat{n}$ (כח הוא שנוי תנע ליחידת זמן) הוא (עיין (2.15))

$$(p - \zeta\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\hat{n} - \eta\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{n} \tag{2.25}$$

האפקט של צמיגות שניה הוא לשנות את הלחץ האפקטיבי. צמיגות הדינמית קשורה עם כח שהוא לא בהכרח בניצב לשטח בו מדובר ($\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}$ לא בכוון $\hat{n}$). למשל יש רכיבים של כח במקביל לדופן המוצק כראות בחלק הבא מהצמיגות:

$$\vec{F}_{vis} = -\eta\overleftrightarrow{\sigma}\cdot d\vec{S} \tag{2.26}$$

אם במקום נוזל הנוגע בדופן יש שני נוזלים שונים במגע (שמן על מים למשל) אזי במקום (2.24) יהיה לנו בגבול

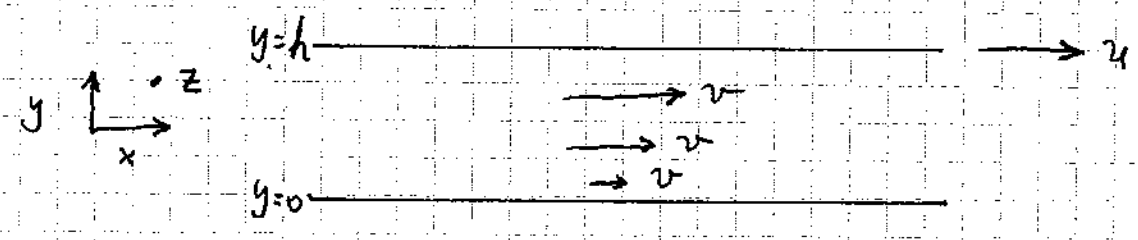
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \tag{2.27}$$

ביחד עם

$$(p_1 - \zeta_1\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_1)\hat{n} - \eta_1\overleftrightarrow{\sigma}_1\cdot\hat{n} = (p_2 - \zeta_2\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_2)\hat{n} - \eta_2\overleftrightarrow{\sigma}_2\cdot\hat{n} \tag{2.28}$$

ואז יש לצרף גבול חפשי (כמו היה בהזנחת האטמוספרה) אבל אגף ימין של (2.28) מתאפס.

<u>דוגמה 2.1</u> נפתור את זרימת נוזל צמיג ובלתי-דחיס בין שתי פלטות און-סופיות מקבילות, האחת במנוחה והשניה נעה במקביל לעצמה במהירות u



כתנאי גבול צריך $\vec{v}(x,0,z)=0$ ו- $v_x(x,h,z)=u$. בגלל סימטריות הפלטות וטבעו הסטציונרי של הבעיה מותר להניח שהגדלים הפיזיקליים הם בלתי תלויים ב x, z, t.
לכן המשוואות הן

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{(רציפות)} \tag{2.29}$$

$$\rho\, v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} \tag{2.30}$$

מ (2.29) ותנאי הגבול נובע ש $v_y=0$ בכלל, ומהסימטריה אפשר להניח ש v_z מתאפסת בכלל. ב-(2.30) זה נותן

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (\text{רכיב } y) \tag{2.31}$$

$$\eta \Delta v_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{רכיב } x) \tag{2.32}$$

ומכאן ש p אחיד לגמרי כאשר v_x לינארי ב y.
מקיום תנאי הגבול יש

$$v_x = u\frac{y}{h} \tag{2.33}$$

לכן השטף של נוזל הוא (נפח ליחידת זמן ליחידת אורך z)

$$Q = \tfrac{1}{2} u h \tag{2.34}$$

הלחץ מפעיל כח נצב על כל פלטה. כדי לחשב

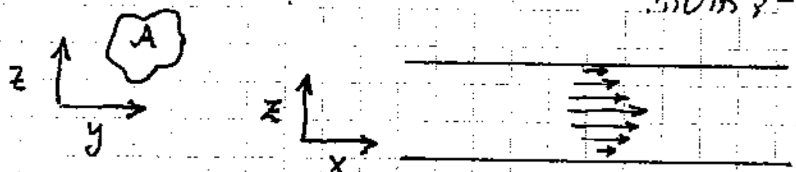
כח החכוך מחשב $\overleftrightarrow{\sigma}$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{2}{3}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,\delta_{xy} = \frac{u}{h} \qquad (2.35)$$

וכל הרכיבים האחרים נעלמים. לפי (2.26) הפלטה הקבועה, בה האנך בעל רכיב y שלילי, מרגישה כח חיובי בכוון x בגודל $\eta u/h$ ליחידת שטח, והפלטה הנעה (אנך הפוך) מרגישה כח $-\eta u/h$ בכוון x, כלומר חכוך בתנאי ש η חיובית. בחשבון הזה ברור תפקודה של הצמיגות בהעברת תנע ממקום למקום בזורם.

<u>תרגיל 2.1</u> מצא המהירות, החכוך בשתי הפלטות ושטף הנפחי בבעיה הקודמת כאשר הפלטות קבועות אבל ישנו גרדיינט של לחץ. הנח סטציונריות. מהו פרופיל הלחץ?

<u>דוגמה 2.2</u> נוזל זורם בצינור בעל חתך קבוע. ישנו גרדיינט לחץ הגורם לזרימה סטציונרית. נניח זרימה בלתי-דחיסה.



שים לב ש- $\vec{v}=(v_x,0,0)$, כך שהמשוואות הן (נניח שאין שדה כבידה)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad \text{(רציפות)} \qquad (2.36)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x \qquad \text{(רכיב x)} \qquad (2.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{(רכיבי y,z)} \qquad (2.38)$$

לכן $v_x = v_x(y,z)$, ו- $p = p(x)$. הצבת (2.36) ב- (2.37) נותנת

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2.39)$$

כיון ש v_x לא תלויה ב x אבל p תלויה רק ב x שני אגפי משוואה זו חייבים להיות קבועים - אותו קבוע. אנו מניחים

שגרדיינט הלחץ קבוע - למעשה $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\delta p}{L}$ כאשר L אורך הצינור, δp הפרש הלחץ, שאנו לוקחים כחיובי כך שהגרדיינט שלילי בכוון הזרימה x.

כדי לחשב השטף דרך הצינור

$$Q = \int_A dy\,dz\, v_x \tag{2.40}$$

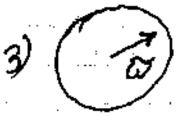
יש לפתור המשוואה

$$\Delta_2 v_x \equiv \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\delta p}{\eta L} \tag{2.41}$$

בתנאי הגבול (2.24) כלומר

$$v_x\Big|_{\partial A} = 0 \quad (\text{תנאי דיריכלה}) \tag{2.42}$$

מתורת המשוואות הדיפרנציאליות החלקיות מטיפוס אליפטי יש תמיד פתרון יחיד של בעיה זו. אפשר למצוא אותו אנליטית רק עבור צורות פשוטות של חתך הצינור. למשל אם הוא עגול בעל רדיוס R נכתוב (2.41) בקואורדינטות גליליות



$$\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}\left(\varpi \frac{\partial v_x}{\partial \varpi}\right) + \frac{1}{\varpi^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} = -\frac{\delta p}{\eta L} \tag{2.43}$$

ההנחה ש v_x אינה תלויה ב θ סבירה - סימטריה גלילית ולכן

$$\frac{d}{d\varpi}\left(\varpi \frac{d v_x}{d\varpi}\right) = -\frac{\delta p}{\eta L}\varpi \tag{2.44}$$

נאינטגרל

$$\varpi \frac{d v_x}{d\varpi} = -\frac{\delta p}{2\eta L}\varpi^2 + a \tag{2.45}$$

נחלק ב ϖ ונאינטגרל שוב

$$v_x = -\frac{\delta p}{4\eta L}\varpi^2 + a \ln \varpi + b \tag{2.46}$$

ב $\varpi = 0$ ה v_x מתפוצץ אלא אם כן נקח $a=0$, וכדי ש (2.42) יתקיים נצטרך לקחת

$$b = \frac{\delta p}{4\eta L} R^2 \tag{2.47}$$

על כן

$$v_x = \frac{\delta p}{4\eta L}(R^2 - \varpi^2) \tag{2.48}$$

כתוצאה פרופיל המהירות הוא פרבולי. את זרימת הנפח אפשר לחשב כך:

$$Q = 2\pi\int_0^R \varpi v_x\, d\varpi = \frac{\pi\delta p}{2\eta L}\left(\frac{R^2}{2}\varpi^2 - \frac{1}{4}\varpi^4\right)\Bigg|_0^{\varpi=R} \qquad (2.49)$$

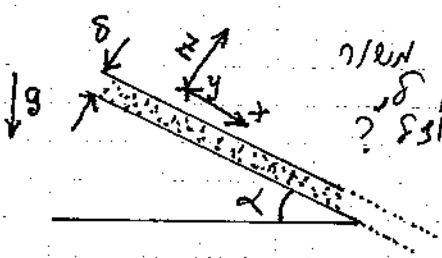
$$Q = \frac{\pi\delta p}{8\eta L}R^4 \qquad (2.50)$$

זהו חוק Poiseuille. פואזיי גילה חוק זה נסיונית ב 1840. סטוקס גזר אותו מהמשוואות חמש שנים מאוחר יותר. גם לכבוד פואזיי יחידת הצמיגות במערכת cgs נקראת Poise.

<u>תרגיל 2.2</u> אם חתך הצינור הוא האליפסה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

מהו התחליף לחוק פואזיי? רמז: חזור לקואורדינטות x,y.



<u>דוגמה 2.3</u> נוזל צמיג זולג על פני מישור נטוי בזווית. עובי שכבת הנוזל הוא δ, והוא אחידה. באיזה קצב זורם הנוזל?

ראשית כל ננסה לנחש התשובה. כאן השדה הגרביטציוני חשוב. ברור שהרכיב לאורך המישור הוא הרלבנטי ולכן מתחשק ש $Q \propto g\sin\alpha$. מהדוגמה הקודמת נראה שכאן גם כן $Q \propto \frac{1}{\eta}$ ו[illegible] (Q מסמל כאן נפח ליחידת עומק ליחידת זמן)

$$Q \propto \frac{g\sin\alpha}{\eta} \qquad (2.51)$$

כעת נבדוק מימדים. במשוואות נביר-סטוקס (2.20) המימדים של ∇p ו- $\eta\Delta\vec{v}$ חייבים להיות זהים. לכן

$$\frac{g}{\eta} \text{ ממדי } \equiv \left[\frac{g}{\eta}\right] = \left[\frac{\Delta\vec{v}}{\rho}\right] = \frac{1}{L^2}\frac{L}{T}\frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{TM} \qquad (2.52)$$

כיוון ש Q בעל ממדים L^2/T, אנו חייבים להכניס בביטוי (2.51) פקטור עם ממדים M. מן הכמויות בבעיה שלא השתמשנו בהן, ρ ו- δ אפשר לבנות כמות עם הממדים הרצויים: $\rho\delta^3$. לכן הניחוש הוא

$$Q \sim \frac{\rho g\sin\alpha\,\delta^3}{\eta} = \frac{g\sin\alpha\,\delta^3}{\nu} \qquad (2.53)$$

את המקדם המספרי אפשר לקבל רק מחשוב מפורט. נבחר צורך
כב צינור, נניח שהמהירות היא כולה בכוון x ושאין כל תלות
של הכמויות ב-x,y וב-t. משוואות נביר-סטוקס (2.20) נותנות
עבור רכיב z

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \cos\alpha = 0 \qquad (2.54)$$

ועבור רכיב x

(14)
$$+\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \rho g \sin\alpha = 0 \qquad (2.55)$$

כמו בעבור מצב ניקח p קבוע ולכן מ-(2.54) רואים ש

$$p = p_A + \rho g \cos\alpha \cdot (\delta - z) \qquad (2.56)$$

כאשר p_A הוא לחץ האטמוספרי ב $z=\delta$, ו- $z=0$ מתאים
למשור המדרון. מ-(2.55) יוצא

$$v_x = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} z^2 + az + b \qquad (2.57)$$

יש צורך להטיל תנאי גבול לפי (2.28) ולפי (2.24). במשור
צריך $v_x=0$ ולכן $b=0$. במשטח החפשי $z=\delta$ צריך לקיים
(2.28):

בכוון x בהזנחת איבר הצמיגות של האויר

$$-\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \rho\delta g \sin\alpha \cdot \quad - \eta a = 0 \qquad (2.58)$$

בכוון z

$$\cancelto{0}{-2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}} + p = p_A \qquad (2.59)$$

משוואה האחרונה מצדיקה בחירת קבוע האינטגרציה ב-(2.56).
מ-(2.58) מקבלים ש-

$$a = +\frac{\rho g \sin\alpha \cdot \delta}{\eta} \qquad (2.60)$$

כך ש

$$v_x = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta} (2\delta - z) z \qquad (2.61)$$

מכאן מקבלים

$$Q = \int_0^{\delta} v_x \, dz = \frac{\rho g \sin\alpha \cdot \delta^3}{3\eta} = \frac{g \sin\alpha \cdot \delta^3}{3\nu} \qquad (2.62)$$

זאת הנוסחה שנתנו ב (2.53), אך עתה מקדם המספר ידוע.

ד. צמיגות ודיסיפציה

כאשר בנינו טנזור המומנטום $\overleftrightarrow{\Pi}$ לזורם צמיג נכנסה η (וגם ζ) כמקדם פנומנולוגי - סימנו וגודלו לא נקבע אז. אבל על נקל לראות ש- η חייבת להיות חיובית. למשל, ב (2.39) מניחים η קבועה. כהגדרה $\partial_x p < 0$ כי אינטואיטיבית מהירות הזרימה היא מלחץ גבוה ללחץ נמוך. לכן

$$\eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)<0 \tag{2.63}$$

ומכאן ש

$$\eta\int_A v_x\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)dz\,dy<0$$

כי סכמנו כהגדרה. נאינטגרל לפי חלקים. כיוון ש v_x חייבת להתאפס על גבול הצינור, מקבלים

$$-\eta\int_A\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\right]dz\,dy<0 \tag{2.64}$$

שאומר שבהכרח $\eta>0$.

ברמה יסודית יותר, סימן η (וגם ζ) נקבע ע"י חוק השני של התרמודינמיקה. נזכר בגזירת חוק שימור האנרגיה לזורם בסעיף 1.10. שם הגענו למסקנה שלשטף האנרגיה

$$\rho\vec{v}\left(\tfrac{1}{2}v^2+u\right) \tag{2.65}$$

ויש לגלגל $p/\rho\cdot\rho\vec{v}$ כי הלחץ עושה עבודה בזורם ולכן $p\vec{v}$ משול לצרף אנרגיה. זה היה עבור זורם אידיאלי. לזורם צמיג תפקידו של הלחץ עובר לקומבינציה (עיין (2.15))

$$\overleftrightarrow{\Pi}-\rho\vec{v}\vec{v}=p\overleftrightarrow{I}-\eta\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\overleftrightarrow{I}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{2.66}$$

שהיא טנזור. זאת אומרת, הכח ליחידת נפח מתקבל מהדיברגנס של הכמות (2.66), כפי שעולה (2.16). וזה אומר ששטף האנרגיה כעת הוא עתה $(\rho\vec{v}\vec{v}-\overleftrightarrow{\Pi})\cdot\vec{v}$ או

$$\rho\vec{v}\left(\tfrac{1}{2}v^2+h\right)-\eta\vec{v}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \tag{2.67}$$

שני האיברים האחרונים הם התיקונים הבאים מצמיגות.

מהאמור ברור שאת משוואת הרציפות של אנרגיה יש לכתוב בצורה הבאה:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{v}\left(h+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)-\eta\,\vec{v}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\,\vec{v}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right]=0 \quad (2.68)$$

כעת נגזור משוואה שקולה לזו במקביל לחשבון בסעיף 1.11. לא נתעכב על כל הפרטים. רק נשים לב שבמקום $\rho T\,\partial s/\partial t$ ב-(1.163) יש להציב

$$\rho T\frac{\partial s}{\partial t}\rightarrow\rho T\frac{ds}{dt}-\rho T\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s \quad (2.69)$$

(כאן $ds/dt\neq 0$ בגלל הדיסיפציה הנובעת מהצמיגות). כמו כן ב-(1.164) יש להחליף

$$-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p\rightarrow-\vec{v}\cdot\vec{\nabla}p+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\zeta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \quad (2.70)$$

כתוצאה משוואת הרציפות נראית כך:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{v}\left(h+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)\right]= \quad (2.71)$$

$$\rho T\frac{ds}{dt}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\zeta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

לאחר (1.173)-(1.175) אפשר לכתוב $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})$ מתוך כך:

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\cdot(\eta\overleftrightarrow{\sigma})\equiv\sum_{ij}v_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta\sigma_{ij})=\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\eta v_i\sigma_{ij}) \quad (2.72)$$

$$-\sum_{ij}\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij}\equiv\vec{\nabla}\cdot(\eta\,\vec{v}\cdot\overleftrightarrow{\sigma})-\eta\underbrace{\vec{\nabla}\vec{v}:\overleftrightarrow{\sigma}}_{\text{דיספציה}}$$

ביתר קלות רואים ש-

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}(\zeta\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v})=\vec{\nabla}\cdot(\zeta\,\vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v})-\zeta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2 \quad (2.73)$$

נציב (2.72) + (2.73) ב-(2.71) ונעביר כמה תרומות אגף

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(u+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{v}\left(h+\tfrac{1}{2}\vec{v}^2+\phi_N\right)-\eta\,\vec{v}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta\,\vec{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right] \quad (2.74)$$

$$=\rho T\frac{ds}{dt}-\eta\,\vec{\nabla}\vec{v}:\overleftrightarrow{\sigma}-\zeta(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})^2$$

השוואה עם (2.68) מראה לנו שבהכרח

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \eta\, \vec\nabla v : \overleftrightarrow{\sigma} + \zeta (\vec\nabla\cdot\vec v)^2 \qquad (2.75)$$

נחזור לרגע ל (2.72) ונבחין ש

$$\vec\nabla v : \overleftrightarrow{\sigma} \equiv \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\sigma_{ij} \qquad (2.76)$$

בגלל סימטריות הטנזור $\overleftrightarrow{\sigma}$. בגלל ש σ_{ij} נטולת עקבה נוסיף $-\frac{2}{3}\vec\nabla\cdot\vec v\,\delta_{ij}$
טריוויאלית:

$$\vec\nabla v : \overleftrightarrow{\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\sigma_{ij})^2 \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\overleftrightarrow{\sigma})^2 > 0 \qquad (2.77)$$

התוצאה הסופית היא

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\eta\,\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{\sigma})^2 + \zeta(\vec\nabla\cdot\vec v)^2 \qquad (2.78)$$

כיוון שלא הרשנו שום מנגנון שיכול להוביל אנטרופיה חוץ מהאלמנט
בו היא נוצרה, אזי החוק השני קובע ש $ds/dt > 0$.
זה יהיה נכון תמיד רק אם בכל חומר ותנאים

$$\eta \geq 0 \qquad \zeta \geq 0 \qquad (2.79)$$

זהו מקרה פרטי של משפט הנובע מחוק השני ואומר שכל
מקדם פנומנולוגי של דיסיפציה חייב להיות חיובי. נותר על
זה בהמשך הקורס.

<u>דוגמה 2.4</u> נוזל נמצא בתנועה במיכל קשיח שלא נע. כעבור
זמן התנועה נפסקת. כאמור מה שקרה הוא שהאנרגיה
הקינטית המקרוסקופית

$$E_K = \frac{1}{2}\int \rho\, \vec v^2\, d^3x$$

עברה לאנרגיה פנימית. באיזה קצב זה קורה? אם תהליכי
הרלקסציה של הנוזל מהירים, הוא יהיה כל הזמן קרוב
לשיווי משקל לוקלי (כל אלמנט עם טמפרטורה, לחץ וכו' משלו).
אז לגבי שינוי קטן של התנאים באלמנט בעל נפח ΔV חוק הראשון
של התרמודינמיקה אומר

$$d(\rho u \Delta V) = T\, d(\rho s \Delta V) - p\, d(\Delta V) \qquad (2.80)$$

כיוון שהנוזל בד"כ יהיה בלתי דחיס, אפשר להתייחס אל ρ
ואל ΔV כקבועים. אם כך יוצא לנו ש

$$\rho\frac{du}{dt} = T\rho\frac{ds}{dt}$$

באגף ימין נציב לפי (2.78), אבל נזכור שבזורם בלתי דחיס $\vec\nabla\cdot\vec v=0$. לכן

$$\frac{dE_K}{dt} = -\int\rho\frac{du}{dt}d^3x = -\frac{1}{2}\int\eta\sum_{ij}\sigma_{ij}^2\, d^3x \qquad (2.82)$$

עבור מערכת סגורה זו הנוסחה הכללית לדיסיפציה.

<u>תרגיל 2.3</u> מדוע אי אפשר להשתמש בנוסחה מעין (2.82) לאלמנטי הנוזל, כל אחד בנפרד?

<u>ה. צמיגות וערבוליות</u>

כל הדיון כאן הוא בהקשר זורם בלתי דחיס (כגון נוזל) עם צמיגות η קבועה. במשוואת נביר-סטוקס בצורתה (2.20) נכתוב את $\vec v\cdot\vec\nabla$ ונחליף עפ"י (1.51)

$$\vec v\cdot\vec\nabla\vec v \rightarrow \frac{1}{2}\vec\nabla\vec v^2 - \vec v\times\vec\omega \qquad (2.83)$$

כך שנקבל

$$\frac{\partial\vec v}{\partial t} - \vec v\times\vec\omega = -\vec\nabla\left(\phi_M + \frac{1}{2}\vec v^2 + p/\rho\right) + \nu\Delta\vec v \qquad (2.84)$$

הקורל של משוואה זו הינו

$$\frac{\partial\vec\omega}{\partial t} - \vec\nabla\times(\vec v\times\vec\omega) = \nu\Delta\vec\omega \qquad (2.85)$$

נציב זאת בביטוי (1.66) עבור קצב שינוי הסירקולציה, ונקבל

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu\int_A \Delta\vec\omega\cdot d\vec S \qquad (2.86)$$

לכן משפט קלווין אינו תקף כללית כמו בזרימה אידיאלית כתוצאה מהופעת הצמיגות.

יש אבל לציין שאם אזור בזורם נטול ערבוליות מלכתחילה, לכל חלקיק בתוך אותו אזור הנישא עם הזרימה, אין כל תרומה לאגף ימין של (2.86) ברגע הראשון, ולכן הסירקולציה שלה נשמרת וממשיכה להיות אפס. כלומר, שבכל החלקיקים שם, האזור הנישא נשאר נקי מערבוליות. בגבולות עם אזורי הזורם בעלי ערבוליות השקול אינו נקי ותתכן

האצנת ערבוליות לתוך האזור הראשון כי יש לולאות שמגשרות בינו לבין האזור עם ערבוליות.

וורטקס בודד בתוך זרימה פוטנציאלית נשאר כזה, כי לולאות בסביבתו מתחילות בעלות סירקולציה אפס, ולפי (2.86) הסירקולציות נשארות אפס. לפי (2.86) הסירקולציה של הוורטקס עצמו גם נשמרת. זה מרמז שערבוליות נגרמת מכל וורטקס לאזור הסמוך - בהתאם לדיון בקטע הקודם. הוורטקס, אם כן, עשוי להתפשט. נראה שצמיגות נוטה להרוס ערבוליות בגוף הזרם, וליצרה בגבולותיו עם אובייקטים מוצקים.

עפ"י הזהות

$$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B) = (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A - \vec B(\vec\nabla\cdot\vec A) - (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec A(\vec\nabla\cdot\vec B) \tag{2.87}$$

נוכל לשכתב (2.85) כך (זכור ש $\vec\nabla\cdot\vec\omega = \vec\nabla\cdot\vec v = 0$)

$$\frac{\partial\vec\omega}{\partial t} - (\vec\omega\cdot\vec\nabla)\vec v + (\vec v\cdot\vec\nabla)\vec\omega = \nu\,\Delta\vec\omega \tag{2.88}$$

נביא בחשבון הנגזרת ההסעתית:

$$\frac{d\vec\omega}{dt} = (\vec\omega\cdot\vec\nabla)\vec v + \nu\,\Delta\vec\omega \tag{2.89}$$

נכפול סקלרית ב $\vec\omega$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec\omega^2 = \sum_{ij}\omega_i\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \nu\sum_i\omega_i\,\Delta\omega_i \tag{2.90}$$

אפשר לכתוב גם

$$\omega_i\,\Delta\omega_i = \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\omega_i\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right) - \sum_j\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)^2 \tag{2.91}$$

אם נאנטגרל (2.90) עם (2.91) על פני נפח V שנוסע עם הזרם, הרי שלפי משפט (1.11)

$$\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}\vec\omega^2 d^3x = \sum_{ij}\int_V\frac{1}{2}\omega_i\omega_j\sigma_{ij}\,d^3x - \nu\sum_{ij}\int_V\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)^2 d^3x \tag{2.92}$$

$$+\,\nu\int_{\partial V}\frac{1}{2}\vec\nabla\vec\omega^2\cdot d\vec S$$

כאן השתמשנו בטרנספורמציה

$$\sum_{ij}\omega_i\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \rightarrow \frac{1}{2}\sum_{ij}\omega_i\omega_j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec v}_{0}\,\delta_{ij}\right) \tag{2.93}$$

האינטגרל $\frac{1}{2}\int \omega^2 d^3x$ נקרא האנסטרופיה של הנפח V. הוא מודד של כמות הערבוליות בו. האיבר השלילי באגף ימין התלוי ב ν שואף להקטין האנסטרופיה. אפשר לאמר מזה שבנפח הזורם צמיגות הורסת ערבוליות.

האיבר האחרון תורם רק בגבול הנפח. אם נרחיב V לגבול כל הזורם הוא יתרום רק בדפנות ובמכשולים שהזורם פוגש. סימנו לא ברור. לכן מעלה האפשרות שצמיגות יוצרת ערבוליות בנקודות מגע בין זורם לגוף מוצקי. תפקידה של הצמיגות האלו, אם כן, כפול.

(16)

האיבר הראשון באגף ימין של (2.93) יכול להגדיל או להקטין האנסטרופיה. כיצד גזירה בזרימה ללא קשר עם צמיגות מגבירה או מחלישה הערבוליות? ניקח וורטקס כדוגמה. אם הגזירה נוטה למתוח את הוורטקס לאורכו, אזי שהוא יעשה דק יותר (שמור מסה). אז חוק שמור של הערבוליות (משפט קלווין) אומר אז שגודל ω יגבר. והפוך עם מכווץ וורטקס לאורכו. בזרימה טורבולנטית נקודות בזורם מתרחקות זו מזו סיסטמטית. זה אומר שהאנסטרופיה הולך וגדל.

ו. חוק הדמויות

משוואות נביר-סטוקס קשה לפתרון באופן כללי. עזרה מתקבלת מהאפשרות לטפל בבת אחת באוסף של בעיות השונות אחת מהשניה רק בסקאלה. למשל, תנועה אחודה של כדורים בגדלים שונים בתוך אותו נוזל, זרימה דרך צינורות עם חתך מלבני בגדלים שונים, וכו'. כאשר נמצא הפתרון לדוגמה אחת, עוברים לפתרונות לכל האחרות. הדמות זה מבחינה גאומטרית בעזרת "סקיילינג". מה שמאפשר גישה זו הוא חוק הדמויות של ריינולדס.

בכל זרימה ושנה סקלה טיפוסית של מהירות U, למשל מהירות הכדור בזורם, או מהירות הזרימה בצינור. ויש גם סקלה טיפוסית של אורך L, למשל רדיוס הכדור או קוטר הצינור. מבחינה מימדית נוכל לכתוב את $\vec{v}(\vec{x})$ בעזרת פונקציה נטולת מימדים $\vec{V}$:

$$\vec{v} = U\,\vec{V}(\vec{x}/L) \qquad (2.94)$$

(הנחה של סטציונריות). נניח זרימה בלתי-דחיסה עם צמיגות קבועה. את הלחץ נוכל לרשום

$$p = \rho\, U^2 P(\vec{x}/L) \qquad (2.95)$$

גם P נטולת מימדים. כמובן שצורת $\vec{V}$ ו- P תלויה

מלכתחילה בצורה הספציפית, אבל אם נבחר U ו- L בצורה מתאימה, ל-$\vec{V}$ יהיו בד"כ הערכים של V ו- P בסדר גודל היחידה. נציב (2.94) ו- (2.95) ב (2.20) בלי שדה כבידה (כמובן $0=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ כאן):

$$\rho \frac{U^2}{L} \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = -\frac{\rho U^2}{L}\vec{\nabla}P + \frac{\eta}{L^2} U \Delta \vec{V} \qquad (2.96)$$

כאן $\vec{\nabla}$ ו Δ הם האופרטורים הרגילים אך ביחס לקואורדינטות $\vec{x}/L$ ולא $\vec{x}$; לכן ובאו החוצה פקטורים $1/L$. אחרי חלוקה ב $\rho U^2/L$ נקבל משוואה שכולה כמויות נטולות מימד:

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{R_e}\Delta\vec{V} \qquad (2.97)$$

כאשר

$$R_e \equiv \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \qquad (2.98)$$

נקרא מספר של ריינולדס. הוא מספר טהור כי כל פרט אחר ב-(2.97) נטול מימד.

יש לצרף ל (2.97) את תנאי בלתי-דחיס בצורה

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \qquad (2.99)$$

המשוואות (2.99) ו- (2.97) הן 4 רכיבים ומאפשרות מציאת ה-4 פונקציות $\vec{V}(\vec{x}/L)$ ו- $P(\vec{x}/L)$. אם תנאי הגבול (צורות המכשולים בצורתם למשל, ומיקומם ביחס לצורתם) דומים מבחינה גאומטרית, צורת פונקציות אלה תהיינה תלויות רק בפרמטר חסר המימד R_e. לכן לכל הזרימות הדומות גאומטרית יש לדייק ולכתוב (2.94) ו- (2.95) כך:

$$\vec{v} = U\,\vec{V}(\vec{x}/L, R_e)$$
$$p = \rho U^2 P(\vec{x}/L, R_e) \qquad (2.100)$$

כאן $\vec{V}$ ו P תבניות ותלויות לכל הזרימות הדומות - זה נקרא חוק הדמיונות (law of similarity).

אם נשוב גרביטציה בבעיה, צריכים את הסקלה הטבעית של $-\vec{\nabla}\Phi_N$, g, ומוסיפים באגף (2.96) כח הכבידה

$$-\rho g \vec{\nabla}\Phi_N(\vec{x}/L) \qquad (2.101)$$

כאשר Φ_M נטולת ממדים. במקום (2.97) יש לנו

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{Re}\Delta\vec{V} - \frac{1}{F_r}\vec{\nabla}\Phi_M \qquad (2.102)$$

כאשר

$$F_r \equiv \frac{U^2}{gL}$$

נקרא מספר Froude (הנו גם נטול ממדים). ביחד עם משוואת פואסון והיו עתה מספיק משוואות כדי לפתור עבור $\vec{V}$, P ו- Φ_M. ברור שעתה כל הפונקציות האלה תהיינה תלויות ב $\vec{x}/L$, Re ו- F_r.

ברור שכאשר תנאי השפה דומים, הזרימה דומה רק כאשר שני המספרים Re ו- F_r זהים בשני המקרים.

<u>תרגיל 2.4</u> קובייה עם צלע L קשורה מכוונה לחבל בו מושכים אותה במהירות קבועה U בתוך המים של אגם שקט. <u>משיקולים ממדיים</u> רשום נוסחה עבור הכוח F הדרוש למשיכה. התעלם מהכבידה.

<u>תרגיל 2.5</u> כאשר זרימה היא לא סטציונרית, מופיעה בה סקלת זמן טיפוסית T. רשום הכללה של (2.97), וזהה מספר נטול ממדים חדש מלבד זה של ריינולדס.

<u>תרגיל 2.6</u> בתוך זרימה המאופיינת ע"י סקלות L ו- U מפוזרים גרגרים, ורואים שהם מבצעים תנועה אוסצילטורית. איך תלויה התדירות הבסיסית בפרמטרי הבעיה?

נחזור ל (2.97). כיוון שמצפים ש $|\vec{V}|\sim 1$ הרי שכאשר מספר ריינולדס גדול בהרבה מיחידה האבר הבא מהצמיגות זניח לעומת האבר ההסעתי. כלומר צמיגות נעשית בלתי חשובה בזרימות עם מספר ריינולדס גבוה. ולהיפך, אם $Re \ll 1$ הרי שהאבר הבא מהצמיגות מנצח אבר ההסעתי ואפשר להזניח האחרון. בסכום

$$Re \gg 1 \quad\Rightarrow\quad \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} \approx -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \qquad (2.103)$$

$$Re \ll 1 \quad\Rightarrow\quad \eta\Delta\vec{v} = \vec{\nabla}p \qquad (2.104)$$

בתחום האמצעי יש להשתמש במשוואת נביר-סטוקס השלמה.

ג. בעית סטוקס

סטוקס היה הראשון שטיפל בבעיה של תנועת כדור במהירות קבועה בתוך זורם צמיג, ובמיוחד בחשוב כח ההתנגדות שפועל עליו. כאמור בתרגיל (1.7), בהעדר צמיגות אין בכלל התנגדות (פרדוקס ד'אלמבר). את הפתרון נתן סטוקס במקרה של מספר רינולדס נמוך. כך נדרש רק כאן. נניח ש- η קבועה.

המשוואות הרלבנטיות הן

$$\eta\Delta\vec{v}=\vec{\nabla}p \tag{2.105}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0 \tag{2.106}$$

יהיה רדיוס הכדור R ומהירותו $\vec{u}$; נעבור כבדרך למערכת המנוחה של הכדור. אז המהירות של הזורם ב $r\to\infty$ היא $-\vec{u}$.

לאור (2.106) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}+\vec{u})=0$ כך שבאופן כללי

$$\vec{v}=-\vec{u}+\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) \tag{2.107}$$

משוואותנו הן לינאריות, ולכן $\vec{A}$ חייב להיות לינארי ב $\vec{u}$. כיוון ש $\vec{v}$ ו- $\vec{u}$ הם וקטורים פולריים, חייב $\vec{A}$ להיות אקסיאלי. כיוון שהבעיה בעצמה היא כדור הנטול כל כיוון מיוחד, הווקטורים היחידים שמהם ניתן לבנות $\vec{A}$ הם $\vec{u}$ ו- $\vec{x}$ (עם ראשית במרכז הכדור). אזי כללית בוודאי

$$\vec{A}=f_1(|\vec{x}|)\,\vec{x}\times\vec{u} \tag{2.108}$$

17 אם נגדיר $f(r)=\int^r r f_1(r)\,dr$ אזי (נזכור: $\vec{\nabla}f\times\vec{u}=\vec{\nabla}\times(f\vec{u})$)

$$\vec{A}=\vec{\nabla}\times\left(f(|\vec{x}|)\,\vec{u}\right) \tag{2.108}$$

(יש לזכור כאן ש $\vec{\nabla}|\vec{x}|=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$). נציב ב (2.107) ונזכור שבקואורדינטות קרטזיות ישנה הזהות האופרטורית

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\ )-\Delta \tag{2.109}$$

אז

$$\vec{v}=-\vec{u}+\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot(f\vec{u})-\Delta(f\vec{u}) \tag{2.110}$$

ניקח עוד פעם קורל

$$\vec{\omega}=\vec{\nabla}\times\vec{v}=-\Delta\,\vec{\nabla}\times(f\vec{u})=-\Delta\left(\vec{\nabla}f\times\vec{u}\right) \tag{2.111}$$

הנגזרות של Δ נפעלות על כל רכיב וקטור בנפרד.
היות ו- $\vec{u}$ קבוע הרי ש

$$\vec{\omega} = -\Delta\left(\vec{\nabla} f \times \vec{u}\right) = -\left(\Delta \vec{\nabla} f\right) \times \vec{u} \tag{2.112}$$

המשוואה (2.105) נותנת $\Delta\vec{\omega}=0$. לכן

$$\left(\Delta\Delta\, \vec{\nabla} f\right) \times \vec{u} = 0 \tag{2.113}$$

אפשר להחליף $\vec{\nabla}$ ו- $\Delta\Delta$ ולכן

$$\vec{\nabla}\left(\Delta\Delta f\right) \times \vec{u} = 0 \tag{2.114}$$

זה אומר

$$\Delta\Delta f = C\, \vec{u}\cdot\vec{x} \tag{2.115}$$

כאשר C קבוע. אילו $C\neq 0$ תעלה f ב- ∞ כמו $|\vec{x}|^5$. זה לא טוב כי לפי (2.110) זה יוביל להתנהגות של $\vec{v}$ כמו $|\vec{x}|^3$ שבוודאי לא מתאימה לתנאי הגבול. נסיק $C=0$.

עתה ישנה משוואה סקלרית:

$$\Delta\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(\underbrace{r^2 \frac{d\Delta f}{dr}}_{const.}\Big) = 0\,; \qquad r = |\vec{x}| \tag{2.116}$$

לכן האינטגרל

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + k \tag{2.117}$$

שוב, אם $k\neq 0$, ולפי (2.110) ש- $\vec{v}$ שואפת ב- ∞ ל- $-(1+2k/3)\vec{u}$ שהוא ערך לא נכון. לכן תנאי הגבול דורשים $k=0$.
נאינטגרל המשוואה

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{df}{dr}\right) = \frac{2a}{r} \tag{2.118}$$

לקבל

$$r^2 \frac{df}{dr} = a r^2 + b \tag{2.119}$$

שנותן

$$f = a r - \frac{b}{r} \tag{2.120}$$

לא הוספנו קבוע אינטגרציה שהרי הוא לא יתרום ל- $\vec{v}$ כלל.
נחזור עתה לביטוי (2.110) עבור $\vec{v}$, אך בצורה

$$\vec{v} = -\vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}f) - \vec{u}\,\Delta f \tag{2.121}$$

כאן נציב Δf ישר מ (2.117) עם $k=0$. ברור ש

$$\vec{\nabla}f = a\frac{\vec{x}}{r} + \frac{b}{r^3}\vec{x} \tag{2.122}$$

ולכן נבצע

$$\vec{\nabla}\left(\frac{a\,\vec{u}\cdot\vec{x}}{r} + \frac{b\,\vec{u}\cdot\vec{x}}{r^3}\right) = \frac{a\vec{u}}{r} + \frac{b\vec{u}}{r^3} - \frac{a(\vec{u}\cdot\vec{x})\vec{x}}{r^3} - \frac{3b(\vec{u}\cdot\vec{x})\vec{x}}{r^5} \tag{2.123}$$

ועל כן

$$\vec{v} = \vec{u}\left(-1 - \frac{a}{r} + \frac{b}{r^3}\right) - \left(\frac{a}{r^3} + \frac{3b}{r^5}\right)(\vec{u}\cdot\vec{x})\,\vec{x} \tag{2.124}$$

המהירות $\vec{v}$ צריכה להתאפס ב $r=R$ ומכיוון ש $\vec{u}$ ו- $\vec{x}$ הם בלתי תלויים בד"כ הרי שהמקדמים של שני האברים יתאפסו ב $r=R$ וזה נותן

$$a = -\frac{3}{4}R \qquad b = \frac{1}{4}R^3 \tag{2.125}$$

אם נשמיט המחובר $-\vec{u}$ מ (2.124) נקבל שדה המהירות במערכת הנוזל הנח ב ∞ $(\hat{r} = \vec{x}/x)$:

$$\vec{v} = \frac{3}{4}R\,\frac{\vec{u} + (\hat{r}\cdot\vec{u})\hat{r}}{r} + \frac{1}{4}R^3\,\frac{\vec{u} - 3(\hat{r}\cdot\vec{u})\hat{r}}{r^3} \tag{2.126}$$

יש, כמובן, לקחת $\hat{r}$, r ביחס למרכז הכדור בכל זמן כדי לקבל ה $\vec{v}$ הנכון.

כדי לחשב הכח המתנגד לתנועת הכדור צריך גם הלחץ על פניו. לפי (2.105) ו- (2.121)

$$\vec{\nabla}p = \eta\,\Delta\vec{\nabla}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}f) - \vec{u}\,\Delta\Delta f \tag{2.127}$$

כבר מצאנו ש $\Delta\Delta f = 0$. אם נחליף סדר $\vec{\nabla}$ ו- Δ נקבל

$$\vec{\nabla}\left(p - \eta\,\Delta(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}f)\right) = 0 \tag{2.128}$$

ברור ש

$$p = p_0 + \eta\,\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\Delta f \tag{2.129}$$

כאשר p_0 הוא הלחץ ב ∞.

לפי (2.117) ו-(2.125) $\Delta f = -\frac{3}{2}\frac{R}{r}$ ולכן

$$\wp = p_0 + \frac{3}{2}\eta\frac{R}{r^2}\vec{u}\cdot\hat{r} = p_0 + \eta\frac{3R}{2r^2}u\cos\theta \tag{2.130}$$

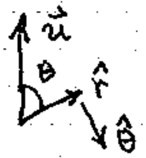
רואים שבמקרה הזרימה הלחץ אינו מפולג שווה בכל הכדור. האסימטריה נובעת מהצמיגות, אבל אין לקחת הגבול $\eta \to 0$ כי זה סותר ההנחה של מספר ריינולדס קטן.

הכח ההתנגדות לתנועה לא בא כולו מהלחץ. לפי (2.15) יש לצרף הכח עם זרימת התנע לתוך הכדור

$$\vec{F} = -\int(\overleftrightarrow{\Pi} - \rho\vec{v}\vec{v})\cdot\hat{r}\,dS = -\int\left(p\hat{r} - \eta\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\hat{r}\right)_{r=R}\cdot\underbrace{R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}_{dS} \tag{2.131}$$

מסימטריה $\vec{F}$ צריך להיות בכוון $\vec{u}$- ולכן

$$F = -\frac{\vec{u}\cdot\vec{F}}{u} = \int\left(p\cos\theta - \eta\sigma_{rr}\cos\theta + \eta\,\sigma_{r\theta}\sin\theta\right)_{r=R}dS \tag{2.132}$$



לצורך המעבר מ (2.131) ל (2.132) השתמשנו בזוויות

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \sigma_{rr}\hat{r}\hat{r} + \underbrace{\sigma_{r\theta}}\hat{r}\hat{\theta} + \underbrace{\sigma_{\theta r}}\hat{\theta}\hat{r} + \sigma_{\theta\theta}\hat{\theta}\hat{\theta} + \dots \tag{2.133}$$

$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}$; $\dots \to \hat{\varphi}$ pr

$$\vec{u} = u\cos\theta\,\hat{r} - u\sin\theta\,\hat{\theta} \tag{2.134}$$

ואורתוגונליות $0 = \hat{r}\cdot\hat{\theta}$ ונרמול $\hat{r}$ ו $\hat{\theta}$.

לפי (2.11) $\overleftrightarrow{\sigma}$ מתקבל מ-$\vec{\nabla}\vec{v}$ ע"י סימטריזציה של הטנזור המתקבל. אם כי אנו עובדים בקואורדינטות כדוריות, אין כל תלות של רכיבי $\vec{v}$ ב φ ואין ל-$\vec{v}$ רכיב בכוון $\hat{\varphi}$. אז הבעיה היא בעצם דו-ממדית

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\hat{r}v_r + \hat{\theta}v_\theta\right) \tag{2.135}$$

ברור ש-

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} = -\hat{r};\quad \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{r} = \hat{\theta};\quad \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\theta} = 0 \tag{2.136}$$

ולכן

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \hat{r}\hat{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \hat{r}\hat{\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \hat{\theta}\hat{r}\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \hat{\theta}\hat{\theta}\frac{v_r}{r} + \hat{\theta}\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \hat{\theta}\hat{r}\frac{v_\theta}{r} \tag{2.137}$$

מ-(2.7) ו-(2.11) אנו מקבלים (זכור: $0=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$)

$$\sigma_{rr} = 2\frac{\partial v_r}{\partial r} \qquad \sigma_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{v_r}{r} \tag{2.138}$$

מ-(2.126) אנו מחשבים בעזרת (2.134) (זכור, אנו במערכת הגוף)

$$v_r = \frac{1}{2}\left(\frac{3R}{r} - \frac{R^3}{r^3}\right)u\cos\theta$$

$$v_\theta = -\frac{1}{4}\left(\frac{3R}{r} + \frac{R^3}{r^3}\right)u\sin\theta \tag{2.139}$$

מכאן

$$\sigma_{rr} = \frac{3}{r}\left(\frac{R^3}{r^3} - \frac{R}{r}\right)u\cos\theta \xrightarrow[r\to R]{} 0$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{3R^3 u\sin\theta}{2r^4} \xrightarrow[r\to R]{} \frac{3}{2}\frac{u\sin\theta}{R} \tag{2.140}$$

מ-(2.130) ו-(2.140) אנו בונים את האגף המופיע ב-(2.132)

$$(p\cos\theta - \eta\sigma_{rr}\cos\theta + \eta\sigma_{r\theta}\sin\theta) = p_0\cos\theta + \eta\frac{3u}{2R}\cos^2\theta + \eta\frac{3u}{2R}\sin^2\theta \tag{2.141}$$

ה-$p_0\cos\theta$ לא תורם לאינטגרל ב-(2.132). שני האיברים האחרונים מתחברים כי $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ולכן

$$F = \frac{3u}{2R}\eta \times 4\pi R^2 = 6\pi\eta u R \tag{2.142}$$

← זוהי נוסחת Stokes המפורסמת. יש להדגיש שהיא נכונה רק עבור מספר ריינולדס נמוך, כלומר עבור

$$R_e = \frac{uR\rho}{\eta} = \frac{uR}{\nu} \ll 1 \tag{2.143}$$

תרגיל 2.7 כדור נופל במים עמוקים בהשפעת הכבידה. מהי המהירות הסופית? אומדן גודל על בועת אויר ההולכת ועולה במים, האם ניתן להשתמש בנוסחה? מה יכולים להיות הספקות? η למים היא 1×10^{-2} ב-c.g.s.

<u>דוגמה 2.5</u> כדור נע בנוזל צמיג במהירות קבועה. Re אינו בהכרח קטן. נחש את האנלוג לנוסחת סטוקס.

בגלל ש Re לא קטן אי אפשר להזניח את האבר ההסעתי במשוואות נביה-סטוקס. הפרמטרים שבבעיה הם: ρ, u, η ו- R. יש לבנות מהם כמות עם ממדים של כח:

$$[F] = MLT^{-2} = ML^{-3}(LT^{-1})^2 L^2 = [\rho u^2 R^2] \tag{2.144}$$

ויש גם מספר ריינולדס (2.143) שהוא חסר ממדים. לא נמצאת קומבינציה אחרת של הפרמטרים עם ממדים של כח שהיא לא תלויה משני אלה. לכן בהכרח

$$F = C(Re)\,\rho u^2 R^2 \tag{2.145}$$

כאשר $Re \ll 1$ זה צריך להתלכד עם (2.142) ולכן

$$C(Re) \to \frac{6\pi}{Re} \qquad Re \ll 1 \tag{2.146}$$

בגבול השני צריך למצוא $f(Re)$ אמפירית. אולם אם Re עדיין לא גדול, ניתן לחשב

$$C(Re) \cong \frac{6\pi}{Re}\left(1 + \frac{3}{8} Re\right) \tag{2.147}$$

שכולל התיקון הראשון בחזקות Re.

<u>דוגמה 2.6</u> נחש הכללה לנוסחת סטוקס כאשר הגוף אינו כדורי אך הוא סופי.

אם הגוף הוא בעל ציר סימטריה ונמשך במקביל לאותו ציר, אפשר לנחש שהכח F עדיין במקביל לציר. נוספו לפרמטרים ρ, u, η הגודל הטיפוסי D של הגוף, ומספרים חסרי מימדים הקשורים לצורתו הגאומטרית α_i. לכן ננחש שבמקום (2.145) יש

$$F = C(Re, \alpha_i)\,\rho u^2 D^2 \tag{2.148}$$

כאשר

$$Re = \frac{\rho u D}{\eta} = \frac{uD}{\nu} \tag{2.149}$$

אם מושכים הגוף שלא במקביל לציר סימטריה, או שאינו בעל ציר כזה, אפשר לצפות שהכח הדרוש לא יהיה מקביל ל $\vec{u}$. בדרך כלל כאשר מספר Re נמוך נצפה

$$\vec{F} = \eta\, \overleftrightarrow{R} \cdot \vec{u} \tag{2.150}$$

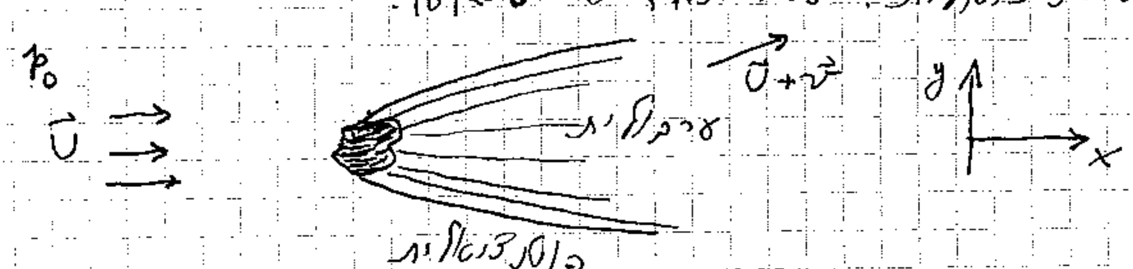
כאשר $\overleftrightarrow{R}$ הוא טנזור בעל מימדי אורך.

<u>תרגיל 2.8</u> גוף כדורי נע במהירות קבועה בתוך גז. האם ניתן לסמוך על נוסחת סטוקס על אף האפשרות שדחיסות הגז תבוא לידי ביטוי? רמז: השתמש בצורה המפורשת של מנגנון הגזים - נוסחה (2.22) - והבא בחשבון מהירות הקול בגז והעובדה שהגז הוא אפן צמיג.

ח. שובלים

שובל נוצר בעקבות תנועת גוף מוצק בנוזל. מסתבר שבלי קשר לצורת הגוף אפשר להסיק כללים מסוימים על הזרימה בשובל וקשריה עם הכוחות של התנגדות הפועלות על הגוף.

כאן נניח זרימה סטציונרית מסביב לגוף במנוחה. המהירות במעלה הזרם תהיה $\vec{U}$, ונכתוב את שדה המהירות, לא $\vec{v}$ כי אם $\vec{v}+\vec{U}$. כמובן $\vec{v}$ מתאפסת רחוק מהגוף, גם במורד הזרימה. השובל מורכב מאותם קווי זרימה שעברו מהגוף או עברו בשכבה דקה בסביבתו. כבר דנו בסעיף ה' בתהפוכות של צמיגות בזרימה ערבולית הסמוכה לדפנות ומכשולים. כבר ציינו בדף 15 שמשפט קלווין לא עובד (אפילו בהעדר צמיגות) עבור קו הזרימה שנוגע בגוף. בנוסף נביא בחשבון את ההבדל בין תנאי הגבול לגבי רכיב אורך ולגבי צמיגות. אם הצמיגות קטנה, הזרימה מתנפצת לשכבה דקה מסביב לגוף אווירודינמי, כלומר נטויה לגודל המהירות המשיקות, אך לא המקבילה, להתאפס על הדופן. אבל אפילו עם צמיגות קטנה, רכיב המקביל חייב להתאפס בדופן. וכאן שתהיה קפיצה מהירה של אותו רכיב ליד הדופן, שפירושה ערבוליות. יש גם להזכיר שלפי (2.86) אותם קווי זרימה (שכולם באו מזרימה אחידה $\vec{U}$) ושלא התקרבו לדופן ישארו עם זרימה פוטנציאלית. המסקנה: בשובל יש זרימה ערבולית, מחוצה לו הזרימה פוטנציאלית. נניח תמיד ש $U \gg |\vec{v}|$.



ניתן לעשות הערכת סדר גודל על רוחב השובל כפונקציה של מרחק מהגוף. במשוואת נאויה-סטוקס נעריך

$$(\vec{U}+\vec{v})\cdot\vec{\nabla}(V_x+v_x)_x \simeq \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\,v_x \simeq U\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim U\frac{v_x}{x} \qquad (2.151)$$

כאן x הוא המרחק במורד הזרימה מהגוף.

יתברר שהשובל צר ביחס לאורכו. זה אומר שכל נגזרת רוחבית שולטת על נגזרת אורכית. לכן

$$(2.152)\qquad \nu\Delta(U_x+v_x) \simeq \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \sim \frac{\nu v_x}{Y^2}$$

כאשר Y הוא רוחב השובל ב x מסוים. נכתוב הלחץ כ-

$$(2.153)\qquad p = p_0 + p'$$

במשוואה מופיע $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\rho}\right)$. המימד של p'/ρ הוא של מהירות בריבוע. אם בתוך השובל $p'/\rho \sim v_x^2$ אז

$$(2.154)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\rho} \sim \frac{v_x^2}{x}$$

ואבר הלחץ זניח לעומת האבר (2.151). במקרה כזה יש לאזן (2.151) כנגד (2.152), וזה נותן

$$(2.155)\qquad Y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{x}{\sqrt{Re}}\,; \qquad Re = \frac{Ux}{\nu}$$

לכן באזורים מספיק רחוקים, בהם מספר ריינולדס גדול, השובל צר והוא מתרחב לפי חוק השורש: $Y\sim\sqrt{x}$.

מה אם ההנחה ש- $p'/\rho \sim v_x^2$ מוטעית? p'/ρ לא יכול להיות מסדר U^2 כי אז p' לא ישאף לאפס רחוק. נשארת האפשרות $Uv_x \sim p'/\rho$. כלומר

$$(2.154')\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\rho} \sim \frac{U v_x}{x}$$

שהוא הגודל של אבר ההסעה (2.151). אם אין שום אלה מאזנים זה את זה, הרי שנצטרך לתקן את (2.155) כי מדובר בסדרי גודל בלבד. היתכן שאבר ההסעה ואבר הלחץ מאזנים זה את זה? כלומר, שאין אפקט של הצמיגות מורגש בתוך השובל? אבל אז אין להבין כיצד המערבולות דועכות בתוך השובל כפי שמצופה. תצפיות – המערבולות נעלמות במורד השובל. אזי (2.155) היא האפשרות היחידה.

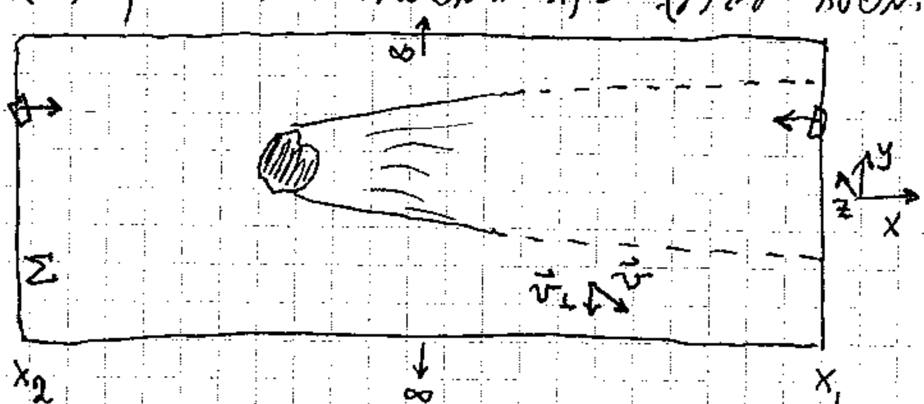
מסתבר בדיעבד ש $v_x^2 \sim p'/\rho$ בתוך השובל.

כעת נקשור בין שדה המהירות $\vec{v}$ בתוך השובל לבין הכח הפועל על הגוף $\vec{F}$. הרכיב F_x נקרא התנגדות (drag) והרכיבים F_z, F_y נקראים העילוי (lift). מחוק שימור התנע ברור שהכוח $\vec{F}$ הוא

$$\vec F = \oint_\Sigma \overleftrightarrow{\Pi} \cdot d\vec S \qquad (2.155)$$

$d\vec S$ פנימה

ואפשר לקחת האינטגרל על כל משטח סגור מסביב לגוף. הן בגלל השימור תנע והן בגלל הסטציונריות (אין תנע הולך ומצטבר בין המשטח לגוף). ניקח המשטח כבתמונה רחוק מהגוף



התרומה מהחלק של המשטח הצדדי תשאף לאפס כי הן p' והן המהירויות (מלבד $\vec U$) שואפות לאפס. האבר $\vec U \vec U$ ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$ אינו תורם שכן כי הוא מקביל למשטח. ו-p_0 לא תורם בגלל שהוא קבוע ותרומת משטח העליון מקזזת זו של התחתון.
כעת נראה שאפשר להזניח האיברים הצמיגיים ב (2.155). כי, למשל,

$$\Pi_{xx} = \rho U U + 2\rho U v_x + \rho v_x^2 - 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + p_0 + p' \qquad (2.156)$$

ב-x_2 אין גרדיאנטים, אז צמיגות לא תורמת. ב-x_1 היחס של אבר הצמיגות לאבר השני הוא (לגבי אבר הראשון היחס עוד יותר קטן)

$$\frac{\nu\, \partial v_x/\partial x}{U v_x} \sim \frac{\nu}{U X} = \frac{1}{Re} \qquad (2.157)$$

וברור שזה קטן אם המשטח רחוק מהגוף. אז נזניח האבר האחרון ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$.

שמור מסה אומר (נזכור: יש מצב עמיד)

$$\oint \rho (\vec U + \vec v) \cdot d\vec S = 0 \qquad (2.158)$$

על כן אפשר לכתוב (2.155) כ-

$$\vec F = \oint_\Sigma \left[\rho\, \vec v\, (\vec U + \vec v) + p' \overleftrightarrow{I}\right] \cdot d\vec S \qquad (2.159)$$

נזניח כאן $\vec v \vec v$ לעומת $\vec U \vec v$ כי $\vec v$ הוא קטן מאוד במשטחים x_1 ו-x_2 כי הם מרוחקים.

נדרש כל זה לקבל

$$F_x = \iint_{x_2} - \iint_{x_1} (p' + \rho U v_x)\, dy\, dz \qquad (2.160)$$

$$F_y = \iint_{x_2} - \iint_{x_1} \rho U v_y\, dy\, dz \qquad (2.161)$$

$$F_z = \iint_{x_2} - \iint_{x_1} \rho U v_z\, dy\, dz \qquad (2.162)$$

ה-p נופל משני האחרונות כיוון שהתרומה $p\overleftrightarrow{I}\cdot d\vec{s}$ הוא בכוון x על המשטחים x_1 ו- x_2. ו- p_0 נופל מהראשונה כי בגלל שהוא קבוע – תרומתו מתבטלת בין שני המשטחים.

כעת נראה ש F_x מקבל תרומה רק מאותו חלק של המשטח x_1 שחותך השובל, ושום תרומה מ x_2. ראינו שמחוץ לשובל הזרימה פוטנציאלית. בסעיף 3.ח נראה שבנסיבות אלה מותר לתאר הזרימה עם משוואת אוילר. לכן נוכל להסתמך על משפט ברנולי בצורתו השניה (סעיף 3.1) שאומר

$$\tfrac{1}{2}(\vec{U}+\vec{v})^2 + (p_0 + p')/\rho = p_0/\rho + \tfrac{1}{2}\vec{U}^2 \qquad (2.163)$$

אך נזניח כאן v_x^2 ומקבלים ש

$$p' = -\rho\vec{U}\cdot\vec{v} = -\rho U v_x \qquad (2.164)$$

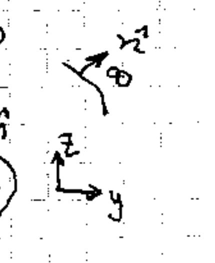
לכן האינטגרנד ב (2.160) מתאפס מחוץ לשובל הן ב x_2 והן ב x_1. למדנו שבתוך השובל $\rho v_x^2 \gg p'$, ולכן p' זניח באינטגרנד של (2.160) בתוך השובל. לכן

$$F_x = -\rho U \iint_{\text{שובל}} v_x\, dy\, dz \qquad (2.165)$$

ברור ש $F_x > 0$ (התנגדות) וזה אומר ש v_x וצטרך להיות שלילי בעיקר ה. ז"א בתוך השובל הזרימה חלשה בהשוואה לזו הפוגעת בגוף.

ומה עם כח העילוי? משום שמחוץ לשובל הזרימה פוטנציאלית, $\vec{v}_\perp = \vec{\nabla}_\perp\phi$ יש ואז באנלוגיה למשפט (1.11)

$$\iint_{\text{חוץ לשובל}} \vec{v}_\perp\, dy dz = \oint_{\infty} \phi\, \hat{n}\, dl - \oint_{\text{גבול השובל}} \phi\, \hat{n}\, dl \qquad (2.166)$$



ב- x_2 אין שובל. אז כל האינטגרל מתאפס כי $\phi \to 0$ ב ∞. ב x_1 כל התרומה מאינטגרל האחרון. אבל ϕ קבוע על גבול השובל שכן קווי הזרימה מוזרים אותו ולכן בהכללה על משטח x_1 הם נראים נצמדים לו. לכן

האינטגרל השני מתאפס גם כן. נשאר ש-

$$\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\rho U \iint_{\text{שובל}} \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \end{pmatrix} dy\,dz \qquad (2.167)$$

אם לגוף ישנו ציר סימטריה מקביל לכיוון x, ברור ש $F_y=F_z=0$. אם לא, נסובב צירי yz כך ש $F_z=0$ ונקבל העילוי בכיוון y.

כעת נחשב בקירוב מסוים $\vec{v}$ בתוך השובל. כמו ב (2.151) נקרב

$$(\vec{U}+\vec{v})\cdot\vec{\nabla}(\vec{U}+\vec{v}) \simeq U\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \qquad (2.168)$$

כמו כן בתוך ה $\Delta\vec{v}$ שמופיע במשוואת נביה-סטוקס נזניח הנגזרות לפי x כי הסכמנו שסקלת y או z קטנה מסקלת x תוך השובל. לכן המשוואה היא, בקירוב של Oseen,

$$U\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2}\right) \qquad (2.169)$$

נגדיר מהירות עזר $\vec{v}_1$ לפי המשוואה

$$U\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\vec{v}_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{v}_1}{\partial z^2}\right) \qquad (2.170)$$

ההפרש $\vec{v}_2=\vec{v}-\vec{v}_1$ נובע מאבר הלחץ ב (2.169). מכאן נראה שהתרומה של אבר זה היא לזרימה פוטנציאלית אך תנאי ההתחלה מתאימים לזו. לכן ננסה למצוא פתרון

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{\nabla}\phi \qquad (2.171)$$

כך שרק חלק מהזרימה הוא פוטנציאלי. מכיוון שנגזרות לפי x קטנות יחסית לאחרות, הרי שרובו של v_x בא מ-v_{1x}. על כן

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} \cong \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \qquad (2.172)$$

זוהי משוואה פרבולית מטיפוס משוואת הדיפוסיה. פתרון עם $v_x\to 0$ ב-∞ הוא

$$v_x = \frac{K}{x}\exp\left(-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right) \qquad (2.173)$$

כדי לקבוע K נציב זו ב-(2.165) ונשתמש בעובדה ש

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right) dy\,dz = \frac{4\pi\nu x}{U} \tag{2.174}$$

__תרגיל 2.9__ הוכח (2.174).

ועל כן

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu x}\exp\left(-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right) \tag{2.175}$$

כאן אנו רואים מה התשלום עבור אי-הטיפול בצורת הגוף. אנו מצליחים לחשב מהירות הזרימה במרחק של פקטור F_x, שבלי לגלות הצורה. מן הנוסחה ברור שרוחב השובל מתחום המהירות v_x הוא

$$\sqrt{y^2+z^2} \sim \sqrt{\frac{4\nu x}{U}} \tag{2.176}$$

שמתאים ל-(2.155). יש לשים לב ש-v_x בעלת סימטריה צירית וצורה גאוסיונית.

השוואת (2.170) ו-(2.172) מראה ש-v_{1y} ו-v_{1z} מקיימות אותה משוואה כמו v_x ולכן הפתרונות עקרונית יהיו מהצורה (2.173). לכן נכתוב ב-(2.167)

$$v_y = \frac{K}{x}\exp\left(-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.177}$$

כמו ב-(2.166) הנגזרת לא תורמת, ולכן עפ"י (2.174) רואים ש-

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu x}\exp\left(-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.178}$$

כיוון שבחרנו $F_z=0$ נקבל

$$v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{2.179}$$

נותר לנו לחשב ϕ. לצורך זה נשתמש במשוואת הרציפות $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \underbrace{\left[\frac{F_x}{4\pi\rho\nu x^2}\left(1-\frac{y^2+z^2}{4\nu x}U\right) + \frac{F_y U y}{8\pi\rho\nu^2 x^2}\right]e^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}}}_{\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}} = 0 \tag{2.180}$$

לפי (2.176) הגבר רק ה $U(y^2+z^2)$ המכפיל F_x אינו יותר
גדול מהגבר רק ה 1. שלב דפ"י (2.176) כותב עם ההגדרה
של Re ב (2.155) מקבלים עבור יחס התרומות של F_y ל F_x

$$(2.181) \qquad \approx \frac{F_y}{F_x}\frac{U y}{\nu} \sim \frac{F_y}{F_x}\frac{U}{\nu}\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{F_y}{F_x}\sqrt{Re}$$

לכן כל עוד מספר ריינולדס גדול ו- F_y לא קטן מאוד
ביחס ל F_x האבר ה F_y מנצח ב (2.180), ולכן יש לנו

$$(2.182) \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}=0$$

נגזור לפי x ונציב מרכיב y של (2.170)

$$(2.183) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}\right)}_{f'(x)\,H(y,z)}=0$$

כאן f היא איזו פונקציה, ו- $H(y,z)$ היא פונקציה הרמונית
של y ו z. לכן בעזרת עוד פונקציה שרירותית g נאינטגרל

$$(2.184) \qquad \phi = f(x)H(y,z)+g(y,z)-\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}e^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}}$$

כמובן הנגזרה שבצענו כדי להגיע ל- (2.183) עשויה להכניס
פתרונות זרים. קל לבדוק (2.184) ושורות ב (2.182).
אבל נשים לב שלפי משפט ליוביל, פונקציה הרמונית
במישור yz אינה יכולה להיות חסומה אם היא לא קבועה.
כיוון שאי-אפשר ש- ϕ יתבדר, יש לשים H לקבוע, נגיד 1.
כעת האבר האחרון ב- (2.184) מתבדר על ציר x כאשר
מתקרבים אליו בכוון z. כדי לפצות, אנו עלינו לדרוש
שההתבדרות תקוזז ע"י $g(y,z)$ עבור כל x:

$$(2.185) \qquad g(y,z)=\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}$$

עם בחירה זו $\phi \xrightarrow[x\to\infty]{} f(x)$ אבל את החלק הפוטנציאלי
של v_1 לא יהיה קטן עבור $|y|$ או $|z|$ גדולים כמו (2.175).
לכן יש לקחת $f(x)=0$ (או קבוע).

$$(2.181) \qquad \phi(x,y,z)=\frac{F_y}{2\pi\rho U}\frac{y}{y^2+z^2}\left(1-e^{-\frac{U(y^2+z^2)}{4\nu x}}\right)$$

האם שב- v_y ו- v_z יש חלקים שמתאפסים כ- $1/y^2$ או $1/z^2$ עבור $|y|$ או $|z|$ גדולים, בניגוד ל- v_x שמתאפסת אקספוננציאלית. עם הצבת (2.181) מצדיקים ההנחה מתחילת הפרק (2.170).

כיוון קודם שאם לשלב יש צורה סימטרית, ולכן הזרימה היא בעלת סימטריה זוגית, אז אין עלוי. מ (2.178), (2.179) ו- (2.181) רואים ההפך: אם אין עלוי כל הזרימה בתוך השובל היא בכיוון x והיא סימטרית זוגית.

לא נכנס כאן לצורת הזרימה מחוץ לשובל (שם היא פוטנציאלית כאמור).

כל הדיון לעיל מתייחס לשובל שאין בו טורבולנטיות, שובל למינרי (שכבתי). לנושא הטורבולנטיות אנו פונים עתה.

<u>תרגיל 2.10</u> השווה הביטויים עבור v_x ו- v_y קרוב למרכז השובל לפי סעיף ג' ולפי סעיף ח'. האם ישנה התאמה? האם צריכה להיות התאמה? רמז: הנחה מוסכם שונה לגבי כיוון המהירות היסודית של הזרימה.
