1

1. זרימת זורמים אידיאליים

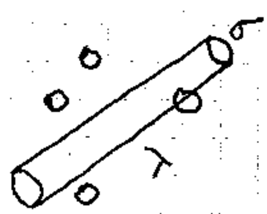
א. תנאים

תורת הרצף כוללת תורת זרימת הנוזלים והגאזים ותורת האלסטיות. שני הנושאים מתארים החומר בצורה רציפה ולכן מתעלמים ממבנהו המולקולרי שהוא הנושא של התורה הקינטית. כאן נעסוק רק בתורת הזרימה.

תורת הזרימה, או ההידרודינמיקה, תקפה על אף מבנהו המולקולרי של זורם בשני תנאים. נהוג לחלק הזורם לאלמנטים או חלקיקים, שאת תנועת כל אחד מהם מתארים. ברור שכל אלמנט חייב להכיל הרבה מולקולות כדי שלא נכנס לנושאים של מבנה קוונטי. מצד שני כל אלמנט חייב להיות קטן בסקלה של האורכים המופיעים בבעיה כמו רוחב צינורות, גודל פינות, גודל ענני גאז וכו'. מכאן שהמרחק הטיפוסי בין מולקולות שנכתוב אותו כ-$n^{-1/3}$ (n הוא צפיפות המולקולות) חייב להיות קטן מסקלה מקרוסקופית טיפוסית.

$$n^{-1/3} \ll L \qquad (1.1)$$

המולקולות מתנגשות זו בזו ויש מושג של נתיב חפשי ממוצע λ. אם σ הוא חתך פעולה לפגיעה, מולקולה תתנגש בממוצע במהלך נסיעה של



$$\lambda_{mol} = \frac{1}{n\sigma} \qquad (1.2)$$

בסקלות גדולות מ-λ_{mol} הזורם מתנהג כמו רצף שכן יש מגע טוב בין המולקולות, אבל בסקלות קטנות מ-λ המולקולות עצמאיות ואי אפשר לדבר על רצף. ברור שנרצה שסקלת המעבר בין ההתנהגויות האלה תהיה קטנה לעומת L כי אחרת שינויי תנועה של הזורם ירגישו במבנהו המולקולרי. התנאי הוא

$$\lambda_{mol} \ll L \qquad (1.3)$$

לדוגמה אטום מימן הוא בעל רדיוס $10^{-8}cm$, ולכן בגאזים רגילים $\sigma \sim 10^{-15}cm^2$. בחדר $n \sim 10^{19}cm^{-3}$ ולכן

$$\lambda_{mol} \sim 10^{-4}\ cm$$

שאומר שאפשר לתאר עם הידרודינמיקה זרימת אויר כל עוד הצינורות, החורים, והפינות המשפיעות על הזרימה הם גדלים מגודל $10^{-3}cm$. ברור שגם מתקיים תנאי (1.1). במרחבים בין הכוכבים $n \sim 1cm^{-3}$

ולכן

$\lambda_{mol} \sim 10^{15}$ ס"מ

ענני מימן באזורים הדק בגלל גודל $\sim 10^{18}$ ס"מ ולכן ניתן לתאר הזרימה בתוכם ע"י הידרודינמיקה.

ההתנגשויות בסקלה מיקרו "מאחדות" את המולקולות ומאפשרות להגדיר מהירות של אלמנט זורם. אם נמצע המהירויות בו נקבל $\vec{v}(\vec{x},t)$ שמשחקת תפקיד של מהירות המקרוסקופית של הזורם.

התאור המלא של זורם ניתן ע"י $\vec{v}(\vec{x},t)$ (3 שדות) ביחד עם שני משתנים תרמודינמיים לכל נקודה t, $\vec{x}$. למשל, אפשר לבחור צפיפות המסה $\rho(\vec{x},t)$ והלחץ $p(\vec{x},t)$ - או אפשר להחליף אחד מהם בצפיפות האנטרופיה או בטמפרטורה. ולכן שאנו צריכים במקרה הכללי 5 משוואות כדי לקבוע את חמשת הכמויות $\vec{v}$, ρ, p.

ב. הידרוסטטיקה

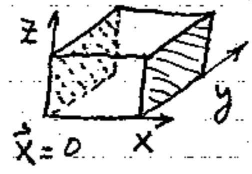
המקרה הפשוט ביותר הוא כאשר $\vec{v}=0$ בהתאמה במערכת נחוס מתאימה. אז צריך רק 2 משוואות כדי לקבוע מצב הזורם. הידרוסטטיקה הוא שם הנושא המדבר על מצב שווי משקל בלי תנועה של זורם. ברור שבמקרה כזה כח הנטו הפועל על כל אלמנט הוא אפס. יש כמה סוגי כח שמרכיבים אותו. ראשית, כל הגרביטציוני. נניח

$$\vec{g} = -\nabla\phi_N(\vec{x}) \tag{1.4}$$

השדה הגרביטציוני. אז הכח הגרביטציוני ליחידת נפח של זורם הוא

$$\vec{f}_g = -\rho\vec{\nabla}\phi_N \tag{1.5}$$

אחר כך יש הכח שחלק אחד של הזורם מפעיל על משנהו.



כח בכיוון x הפועל על הזורם בתוך המלבן הזה

$$F_{px} = \int dy\,dz \{p(0,y,z) - p(x,y,z)\} \tag{1.6}$$

כאשר האינטגרל מתבצע על המשטח הבהיר.

אפשר לקרב זה כך:

$$F_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x}(0,0,0)\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta x \qquad (1.7)$$

נחזור על התרגיל בכיוון y ו- z ונסכם (ΔV - נפח האלמנט)

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p\Big|_0 \cdot \Delta V \qquad (1.8)$$

לכן נקודתית (שאז הקירוב נעשה מדויק) הכח ליחידת נפח מהלחץ הוא

$$\vec{f}_p = -\vec{\nabla} p \qquad (1.9)$$

אם אין כחות אחרים, הרי שתנאי $\vec{v}=0$ דורש שהכח יתאפס בכל מקום לתמיד, ואנו מגיעים לתנאי לשווי משקל הידרוסטטי,

$$\vec{\nabla} p + \rho\,\vec{\nabla}\phi_N = 0 \qquad (1.10)$$

<u>תרגיל 1.1</u> הוכח שבכל נפח V ולכל פונקציה גזירה f (למשל $f = p$)

$$\int_V \vec{\nabla} f\, d^3x = \int_{\partial V} f\, d\vec{S} \qquad (1.11)$$

נקח קרל של (1.10) ונקבל

$$\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\phi_N = 0 \qquad (1.12)$$

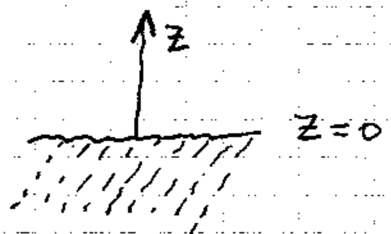
שאומר שגרדיינט הצפיפות בתנאים הידרוסטטיים באותו קו כשדה הגרביטציוני. ואז (1.10) אומר שגם $\vec{\nabla} p$ באותו קו. דרך אחרת לאמר כל זה: הפונקציות ρ, p, ϕ_N כולן פונקציות של אחת מהן. כיוון ש-T הוא תמיד פונקציה $T(\rho,p)$, גם T נחשבת פונקציה של ϕ או של p בלבד. משטחי שווי ערך של כל הפונקציות התרמודינמיות מתלכדים עם אלה של ϕ_N.

<u>דוגמה 1.1</u> באטמוספירה שקטה על פני כדור הארץ $\vec{\nabla}\phi_N$ מכוון בדיוק אנכית. לכן גרדיינט של T עם רכיב אופקי לא קונסיסטנטי pr

תנאי ההידרוסטטיות. כל שינוי טמפרטורה אופקי יגרור אחריו
זרימה - כמו הסעה קוק רוחות, או זרמים בים.

<u>דוגמה 1.2</u> מהו חוק שינוי הלחץ עם עומק בים? הזנח את דחיסות המים.

ניקח $\rho = const.$ ב (1.10) ונקבל



$$p + \rho\,\phi_N = const.$$

נבחר ϕ_N כך שהוא מתאפס על פני הים שם $p = p_A$. לכן $const. = p_A$

(1.13) $$p = p_A - \rho g z$$

והלחץ גודל לינארית עם עומק. כיוון ש $\rho \approx 1\,g\,cm^{-3}$ ו- $g = 980\ cm\,s^{-2}$,

$$\rho g = 980\ g\ cm^{-2}s^{-2} = 980\ \frac{dyne}{cm^3}$$

וכל מטר עומק מוסיף $98{,}000\ \frac{dyne}{cm^2}$ שהוא משהו דומה לעשירית האטמוספרה.

<u>דוגמה 1.3</u> בהנחה שהאטמוספרה הינה איזותרמית, מהו חוק ירידת לחץ האוויר עם גובה?

האטמוספרה מספיק דלילה כדי שנוכל לתאר האוויר כגז אידיאלי. כך אומר

(1.14) $$p = \frac{\rho}{\mu} kT$$

(k קבוע בולצמן, μ מסה טיפוסית של מולקולה). ניקח T כקבוע ונציב ב (1.10)

$$\frac{kT}{\mu}\vec\nabla\rho + \rho\,\vec\nabla\phi_N = 0$$

נחלק ב ρ ונאינטגרל

(1.15) $$\frac{kT}{\mu}\ln\rho + \phi_N = const.$$

ניקח $\phi_N = 0$ על פני הקרקע שם נקרא ל ρ, ρ_0. אז $const. = \frac{kT}{\mu}\ln\rho_0$.

(1.16) $$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{\mu\phi_N}{kT}}$$

לכן קרוב לקרקע ρ יורדת אקספוננציאלית עם גובה.
(1) ומעל גובה יש להתחשב בעובדה ש (r מרחק ממרכז כדה):

$$\phi_N = -GM_\oplus\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_\oplus}\right) \tag{1.17}$$

כאשר הנוזל אינו גאז אידיאלי (למשל נוזל) צריך להחליף (1.14). נגדיר את האנרגיה החופשית של גיבס או פוטנציאל התרמודינמי כך:

$$\Phi = u - Ts + pV \tag{1.18}$$

u - אנרגיה ליחידת מסה
s - אנטרופיה ליחידת מסה
V - נפח ליחידת מסה. שים לב: $V=\frac{1}{\rho}$

חוק הראשון אומר שלשינויים קטנים בין מצבי שיווי משקל תרמודינמי

$$du = Tds - p\,dV \tag{1.19}$$

אם ניקח דיפרנציאל של (1.18) ונציב (1.19) נקבל

$$\Phi=\Phi(T,p) \Leftarrow d\Phi = -s\,dT + V\,dp = -s\,dT + \frac{dp}{\rho} \tag{1.20}$$

אם בנוזל כל אלמנט הוא בשווי משקל תרמודינמי, אפשר להסיק שאותן פונקציות בעלות גרדיאנטים הקשורים לפי

$$\vec{\nabla}p = \rho\vec{\nabla}\Phi + \rho s\vec{\nabla}T \tag{1.21}$$

ולכן אם הנוזל במצב איזותרמי ($\vec{\nabla}T=0$) אפשר לכתוב את תנאי (1.10) כ

$$\vec{\nabla}(\phi_N+\Phi) = 0 \tag{1.22}$$

אם כן בנוזל איזותרמי בשווי משקל הידרוסטטי סכום הפוטנציאלים הגרביטציוני והתרמודינמי קבוע.

<u>תרגיל 1.2</u> הכמות

$$K_T \equiv \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \tag{1.23}$$

נקראת הדחיסות האיזותרמית של החומר הנידון. אם לחומר

מסוים יש צפיפות ρ_0 ודחיסות K_T בנקודה בה הלחץ הוא p_0 והפוטנציאל הגרביטציוני הוא ϕ_0, והגוף במצב שווי משקל הידרוסטטי ואיזותרמי, תן נוסחה פשוטה, מקורבת, עבור p בסביבת אותה נקודה כפונקציה של ϕ_N ושל הפרמטרים האחרים שהוזכרו.

כאשר אין גרביטציה (1.10) אומרת ש-p שווה בכל המרחב אם תנאי ההידרוסטטיקה תקפים. זהו חוק פסקל. אפשר גם ללמוד מ-(1.10) ששווי הלחץ בכיוון האופקי זה במדויק. כאשר מדובר בלחץ גבוה (1.13) מראה שחוק פסקל מתקיים בקרוב גם בכיוון האנכי.

בדרך נוכל להגיע למצב הידרוסטטי במערכת מסתובבת, למשל כאשר נוזל מסתובב בצורה קשיחה בתוך כלי. אנו יודעים שבמערכת כזאת קיים כח צנטריפוגלי שגודלו ליחידת נפח

$$\hat{\varpi}\cdot\hat{\varpi}=1 \qquad \vec{f}_c = \rho\,\Omega^2\varpi\,\hat{\varpi} \tag{1.24}$$

כאשר Ω היא התדירות הזוויתית ו-ϖ הרדיוס (ניצב לציר הסיבוב). תנאי ההידרוסטטיקה הם, אם כן,

$$\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\left(\phi_N - \tfrac{1}{2}\Omega^2\varpi^2\right) = 0 \tag{1.25}$$

<u>תרגיל 1.3</u> נוזל בלתי דחיס מסתובב בצורה קשיחה בתוך כלי כאשר ציר הסיבוב באותו קו עם כיוון שדה הכבידה $\vec{g}$. חשב את צורת משטח הנוזל העליון כפונקציה של g, ρ ו-Ω. מהי צורתו הגאומטרית?

בכל הדיון לעיל נחשב $\vec{\nabla}\phi_N$ כנתון. יש נסיבות ש-ϕ_N נקבע בעיקר ע"י גרביטציית הגוף שנמצא בשווי משקל. למשל בכוכב ה-$\vec{g}$ בו מגיע מהכוכב שפילוגו נקבע ע"י $\vec{g}$. במקרה כזה יש להביא בחשבון משוואת פואסון:

$$\Delta\phi_N \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi_N = 4\pi G\rho \tag{1.26}$$

השקולה לחוק הכבידה של ניוטון. את $\vec{\nabla}\phi_N$ ניתן להחליף ב-$\vec{\nabla}p/\rho$ – עפ"י (1.10) כך ש

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = -4\pi G\rho \tag{1.27}$$

אם יש סימטריה כדורית, הן p והן ρ פונקציות של r בלבד, ולכן

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \qquad (1.29)$$

שהיא משוואה דיפרנציאלית רגילה שאפשר לפתור אם נדע הקשר בין p ו- ρ.

<u>תרגיל 1.4</u> נתון כדור גז אידיאלי איזותרמי המבודד מכל עצם אחר, והנמצא בשווי משקל הידרוסטטי. כתוב משוואה דיפרנציאלית עבור ρ ומצא פתרון אנליטי שעבורו $\rho \to 0$ כאשר $r \to \infty$. מה הן הבעיות הפיסיקליות עם פתרון זה?

הכדור האיזותרמי משמש מודל חשוב באסטרופיסיקה של כוכבים וגלקסיות.

ג. <u>משוואות ההידרודינמיקה</u>

במקרה של ההידרוסטטיקה שתי המשוואות הדרושות הן, למשל, התנאים $T = const$ ו- $\Phi + \phi_M = const$. אם ישנה זרימה אנו צריכים 5 משוואות בסך הכל.

אחת היא משוואת שמור מסה - שלא הלבנות בהידרוסטטיקה. ניקח אזור בגודל נפח V. המסה בו משתנית בקצב

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d^3x = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3x \qquad (1.30)$$

מסה נשמרת. אז שינוי זה הולך לזרימה של מסה מתוך או לתוך V. זרם המסה הוא $\rho\vec{v}$ ולכן

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3x = -\int_{\partial V} \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \qquad (1.31)$$

לפי גאוס

$$\int_{\partial V} \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\, d^3x \qquad (1.32)$$

ולכן

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right] d^3x = 0 \qquad (1.33)$$

הנפח V אפשר לבחור אותו שרירותית - למשל קטן סביב נקודה מסוימת. לכן נכונה המשוואה

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) = 0 \qquad (1.34)$$

שתהיה תקפה בנקודתיות בכל מקום. היא נקראת משוואת הרציפות. אפשר גם לכתוב אותה כך

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\rho}_{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial\rho}{\partial z}} = -\rho\vec\nabla\cdot\vec v \qquad (1.35)$$

הנגזרת הקונבקטיבית של ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, היא אם כן, הנגזרת הכוללת הלוקחת בחשבון תנועת הזורם. חרק הנישא על כנפי הרוח מודד $\frac{d\rho}{dt}$. מכשיר בתחנה המטאורולוגית מודד $\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

בהרבה נסיבות זרימת הזורם יכולה להיות בלתי דחוסה - לא מדובר על תכונת החומר - אלא על תכונת הזרימה. לפי (1.35) בזרימה בלתי דחוסה $\vec\nabla\cdot\vec v=0$, שהוא תנאי שנשתמש בו הרבה. (2)

משוואת הרציפות יכולה להחשב כמשוואה הקובעת השתנות $\rho(\vec x,t)$ אבל $\vec v$ מופיע בה, ולכן דרושה משוואה וקטורית עבור $\vec v$. זאת תבוא מחוק ניוטון השני $m\vec a=\vec F$. כאן m הוא מסת אלמנט מסוים ו-$\vec a$ היא תאוצתו. לא נוכל לזהות $\vec a$ עם $\partial\vec v/\partial t$ כי זאת תאוצה של אלמנט שונה כל רגע אחר - האלמנט עוזב את מקומו. הכוונה יכולה להיות רק -

$$\vec a \leftrightarrow \frac{d\vec v}{dt} = \frac{\partial\vec v}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\vec v \qquad (1.36)$$

כעת הכח הפועל על האלמנט מורכב מכח גרביטציוני $-\rho\,\Delta V\,\vec\nabla\phi$ (כאן ΔV נפח האלמנט) וכח לחץ $-\Delta V\,\vec\nabla p$ (ראה סעיף 1.ב) ולכן חוק ניוטון השני נותן

$$\underbrace{\rho\,\Delta V}_{m}\frac{d\vec v}{dt} = -\Delta V\,\vec\nabla p - \rho\,\Delta V\,\vec\nabla\phi_N \qquad (1.37)$$

או

$$\rho\frac{d\vec v}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec v}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\vec v\right) = -\vec\nabla p - \rho\vec\nabla\phi_N \qquad (1.38)$$

זאת היא משוואת אוילר - משוואה בסיסית מאוד. יש להבין
שהיא קרוב מסוים. למשל היא לא לוקחת בחשבון
כוחות חיכוך בזורם, ולא כוחות אלקטרומגנטיים וכו'.
בכל זאת היא מאוד חשובה ואפשר לקחתה עליה
כהגדרה סוג מסוים של זורם הוא הזורם האידיאלי.
בפרק הזה נדון רק בזרמים אידיאליים - אלה
שאין בהם חיכוך, ואין בהם תהליכים דיסיפטיביים
דומים כמו הולכת חום, שבמשותף עם חיכוך הוא
תופעת הולכה שיסודה במבנה המיקרוסקופי - המולקולרי -
של החומר...

העדר חיכוך אומר שאין אנטרופיה נוצרת בזורם. העדר
הולכת חום אומרת שאין אנטרופיה בזורם מועברת ממקום
אחר. לכן אם נסמן ב s את האנטרופיה ליחידת מסה
של הזורם, הרי ש

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} s = 0 \qquad (1.39)$$

נכפיל משוואה זו ב ρ ו-(1.34) ב s ונחבר

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial \rho}{\partial t} + s\,\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) + \rho\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla}s = 0 \qquad (1.40)$$

או

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho s\vec{v}) = 0 \qquad (1.41)$$

כלומר, האנטרופיה ליחידת נפח ρs מקיימת משוואת
רציפות בצורה עצמה. אפשר לראות שאנטרופיה
נזרמת עם המסה ($\rho s\vec{v}$ הוא זרם האנטרופיה).

משוואות (1.34), (1.38) ו- (1.41) הן משוואות
ההידרודינמיקה של זורם אידיאלי. יש 5 משוואות
עבור חמשת הנעלמים ρ, s, $\vec{v}$ וכפי שאמרנו משתנים
תרמודינמיים אחרים, w, p, Φ וכו' ניתן לכתוב במונחים
של ρ ו- s.

משוואות צריכות להיות מלוות בתנאי גבול. אם יש
גוף מוצק שהזורם נוגע בו, צריכים לדרוש

$$v_n = 0 \qquad (1.42)$$

כאשר v_n הוא רכיב הנורמלי של $\vec{v}$. זה פשוט אומר
שחומר הזורם לא נעלם לתוך המוצק. אם זורם
אחד גובל בשני (כמשל שמן במים), יש
לדרוש בגבול

$$v_{n1} = v_{n2} \qquad (1.43)$$

שאומרת שאין אחד מהזורמים נזלק, ו-

$$p_1 = p_2 \qquad (1.44)$$

שאומרת שאין הגבול מקבל תאוצה אין-סופית (הרי הוא חסר מסה).

<u>תרגיל 1.5</u> הוכח מהמשוואות ותנאי הגבול שמסת כל הזורם ואנטרופית כל הזורם שמורות.

<u>תרגיל 1.6</u> כתוב משוואות הרציפות למסה ולאנטרופיה במערכת קואורדינטות גליליות ובמערכת כדוריות.

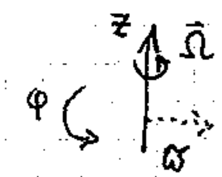
ג. <u>ערבוליות ומשפט ארטל</u>

האנטרופיה הספציפית (ליחידת מסה) s שמורה לאורך קווי זרימה. זה מה ש(1.39) אומרת. אבל כמובן יכול להיות ל-s גרדיאנט מרחבי ואפילו תלות מפורשת בזמן. ישנו, אבל, חוק תנועה מעניין העוסק על שינוי אלה של s. כדי לנסח אותו נגדיר המושג של ערבוליות (vorticity)

$$\vec\omega \equiv \vec\nabla \times \vec v \qquad (1.45)$$

שדה הערבוליות הינו שדה פסאודווקטורי חסר דיברגנץ. באופן כמותי, ערבוליות היא מדד של תנועות מעגליות (מערבולות) בזורם.

<u>דוגמה 1.4</u> נוזל בשיווי משקל בכלי מסתובב יש לו ערבוליות. ברור ש



$$v_\varphi = \varpi\Omega \quad v_z = 0 \quad v_\varpi = 0$$

אפשר לסכם אלה כך:

$$\vec v = \vec\Omega \times \vec x \qquad (1.46)$$

כאן $\vec x$ הוא המקום - יש לו רכיב בכוון ϖ ורכיב בכוון z אבל לא בכוון φ. לכן ל-$\vec v$ יוצא רק רכיב בכוון φ.

נזכיר הזהות

$$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B) = (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A - (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec A(\vec\nabla\cdot\vec B) - \vec B(\vec\nabla\cdot\vec A) \qquad (1.47)$$

ניקח $\vec A = \vec\Omega$ כך ש $\vec\nabla\cdot\vec A = 0$ ו- $\vec B = \vec x$ כך ש $\vec\nabla\cdot\vec B = 3$. אז

$$\vec\nabla\times(\vec\Omega\times\vec x) = \overbrace{\cancel{(\vec x\cdot\vec\nabla)\vec\Omega}}^{0} - (\vec\Omega\cdot\vec\nabla)\vec x + 3\vec\Omega \qquad (1.48)$$

אבל $\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla} = \Omega\frac{\partial}{\partial z}$ ו- $\frac{\partial}{\partial z}\vec{x} = \hat{z}$ כך ש

$$(\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{x} = \vec{\Omega}$$

ולכן

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\nabla}\times(\vec{\Omega}\times\vec{x}) = -\vec{\Omega} + 3\vec{\Omega} = 2\vec{\Omega} \tag{1.49}$$

הערבוליות הינה, אם כן, קבועה בתוך הכלי.

על בסיס דוגמה זו ניתן לומר, באופן לא מדויק, שבמקום בו יש ערבוליות $\vec{\omega}$, הנוזל נמצא בסיבוב עם תדירות $\frac{1}{2}\vec{\omega}$.

בעזרת ערבוליות אפשר לכתוב משוואות של אוילר בדרך אחרת. ננצל הזהות

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \tag{1.50}$$

שממנה נובע

$$\vec{\nabla}\vec{v}^2 = 2(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + 2\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

או

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}v = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \vec{v}\times\vec{\omega} \tag{1.51}$$

כך שמשוואת אוילר עוברת לצורה

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v}\times\vec{\omega} = -\vec{\nabla}\left(\phi_N + \frac{1}{2}\vec{v}^2\right) - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \tag{1.52}$$

מדי פעם נשתמש בצורה הזו. כעת אנו לוקחים קורל שלה - זכור נגזרות לפי $\vec{x}$ מתחלפות עם $\partial/\partial t$ -

ולכן

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\omega}) + \frac{1}{\rho^2}\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p \tag{1.53}$$

הווקטור $\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p$ ניצב הן ל $\vec{\nabla}\rho$ והן ל $\vec{\nabla}p$. כעת כמו כל משתנה תרמודינמי, אפשר לכתוב s בצורה $s(\rho,p)$ זה אומר

$$\vec{\nabla}s = \frac{\partial s}{\partial\rho}\vec{\nabla}\rho + \frac{\partial s}{\partial p}\vec{\nabla}p \tag{1.54}$$

וכיוון ש $\vec{\nabla}s$ ניצב ל $\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p$. לכן אם נכפול

משוואה (1.53) סקלרית ב $\vec{\nabla} s$ נקבל

$$\vec{\nabla} s \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} s \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} s \times (\vec{v} \times \vec{\omega})] \tag{1.55}$$

כאן נעזרנו בזהות

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{1.56}$$

עם $\vec{A} = \vec{\nabla} s$ ו־ $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{\omega}$. בנוסף המכפלה הוקטורית המשולשת ב (1.55) ניתן לשכתב לפי (הזהות)

$$\vec{\nabla} s \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = \vec{v} (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) - \vec{\omega} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s) \tag{1.57}$$

3

שנובע ממנה ש

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} s \times (\vec{v} \times \vec{\omega})] = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s) \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}}^{\,0} - \underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s)}_{= -\frac{\partial s}{\partial t}} \tag{1.58}$$

$-\frac{\partial s}{\partial t}$ מ (1.39), ולכן אם נציב ב (1.55) ונעביר האבר האחרון לאגף שמאל נקבל

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s) \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{= -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho\right)} \tag{1.59}$$

$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho\right)$ עפ"י (1.35). לכן

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s}{\rho}\right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s}{\rho}\right) = 0 \tag{1.60}$$

כלומר הכמות (ערבוליות פוטנציאלית) $\frac{\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} s}{\rho}$ נשמרת לאורך קוו זרימה. זהו משפט ארטל. הוא תלוי רק בהנחת זרימה אידיאלית.

יש הרבה השלכות. אם קו זרימה עובר בנקודה בה $\vec{\nabla} s \perp \vec{\omega}$, שני הוקטורים יהיו ניצבים לאורך כל אותו קו. ואם יש אזור בזרם בו $\vec{\omega} = 0$, כל קווי הזרימה היוצאים ממנו יראו $\vec{\omega} \perp \vec{\nabla} s$ גם אם מופיעה ערבוליות. או יש אפשרות שהערבוליות נשארת אפס.

אפשר לראות במשפט ארטל הדינמיקה של רכיב $\vec{\omega}$ לאורך $\vec{\nabla} s$. מה קורה עם שני הרכיבים הנוספים?

הם נקבעים ע"י (1.53), אך המשוואה קשה לפתרון באופן כללי. יש אבל מקרה מסוים שבו ניתן לתת מסקנה ברורה!

ה. משפט קלווין וזרימה פוטנציאלית

המקרה הזה כאשר $\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p = 0$ ב (1.53). זה קורה בכמה נסיבות.

① כאשר החומר בלתי דחיס במובן ש- $\vec{\nabla}\rho = 0$

② כאשר קיימת "משוואת מצב" מהצורה $p = p(\rho)$ ואז $\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}\rho\, p' = 0$.

__דוגמה 1.5__ זורם נוזל כולו מתוך אזור בו $s = const.$ כיוון ש- s שמורה (מתחים לאורך אלמנט עם הזרימה), ואז $s = s_0$ בכל מקום. הקשר התרמודינמי $p = p(\rho, s)$ (שני משתנים) הופך ל- $p = p(\rho)$.

__דוגמה 1.6__ גז פרמיונים מנוון (למשל החומר בתוך כוכב נויטרונים) אין הלחץ שלו תלוי בטמפרטורה, רק בצפיפות ובעצם

$$p = K\rho^{5/3} = p(\rho)$$

__דוגמה 1.7__ גז חם בד"כ קורן כתוצאה מעירור האטומים בהתנגשויות. ברור שההספק המוקרן ליחידת נפח Λ גדל פרופורציונלי ל- ρ^2 כי שני אטומים צריכים להתנגש (הסיכוי הוא כמו ρ^2) ולפונקציה כלשהי של T (גורם תרמי):

$$\Lambda = f(T)\rho^2$$

הגז גם בולע קרינה אם הוא קרוב למקור (לדוגמה כוכב חם בתווך הבין כוכבי). ברור שקצב בליעת האנרגיה ליחידת נפח Γ פרופורציונלי לצפיפות ρ כי מספר האטומים קובע

$$\Gamma = g(T)\rho$$

אם פליטה ובליעה כה יעילות שהן מתגברות על הולכת החום וכו', שווי משקל תרמי יושג כאשר התנאי $\Lambda = \Gamma$ או

$$g(T) = f(T)\rho$$

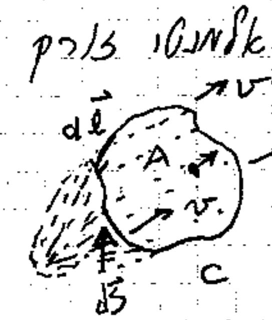
אבל אז T פונקציה מסוימת של ρ ואפשר לראות את $p(\rho,T)$ כפונקציה של ρ בלבד.

כל זרם עם ($p=p(\rho)$) נקרא זרם "ברוטרופי" ברור שמדובר יותר בתכונה של הזרימה ופחות בתכונה של החומר. לכן יותר נכון לאמר "זרימה ברוטרופית".

הזרימה ברוטרופית או בלתי דחיסה (1.53) הופכת ל

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) \tag{1.61}$$

כעת נדמיין לעצמנו לולאה C של אלמנטי זורם הנשאת עם הזרימה. מעניין להסתכל על הסירקולציה



$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \tag{1.62}$$

לפי משפט סטוקס ניתן לכתוב גם כן (כאן A הוא משטח - מעין שק שפיו הוא C)

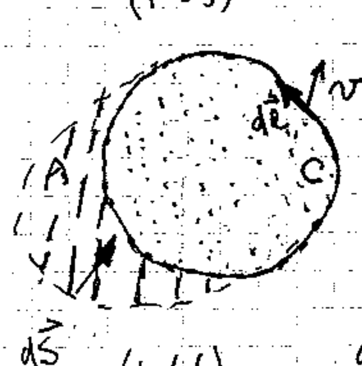
$$\partial A = C \; ; \; \Gamma = \int_A \vec{\omega} \cdot d\vec{S} \qquad (d\vec{S} \text{ פנימה}) \tag{1.63}$$

במהלך הזרימה ה-Γ משתנה לפי

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial A = C} \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \tag{1.64}$$

התנועה של חתיכה של גבול $d\vec{l}$ מוסיפה לשטח של A תוספת

$$d\vec{S} = \vec{v}\, dt \times d\vec{l} \tag{1.65}$$



ולכן

$$\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{v} \times d\vec{l} = -(\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{l}$$

לכן

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_A \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_C (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{l} = \int_A \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \int_A \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} \tag{1.66}$$

בשלב השני השתמשנו במשפט סטוקס שוב. בגלל (1.61) אינטגרל אחד מקבל השני:

$$0 = \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_A \vec{\omega}\cdot d\vec{s} \qquad (1.67)$$

זהו משפט קלווין או משפט שמור הסירקולציה: הסירקולציה של לולאה הנשאת עם הזרימה שמורה! שטף הערבוליות דרך אותה לולאה נשמר.

וישנן הרבה אפליקציות

<u>דוגמה 1.8</u> מימי אגם שקט נשפכים תחת השפעת הכבידה לנהר. באגם $\vec{v}=0$ ולכן אין סירקולציה בשום לולאה. אם הזרימה היא ברוטרופית או בלתי דחיסה משפט קלווין מודיע שסירקולציה מתאפסת בכל לולאה בנהר. כיוון שכן המהירות נגזרת מפוטנציאל כלשהו ϕ ואפשר לכתוב בנהר

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \qquad (1.68)$$

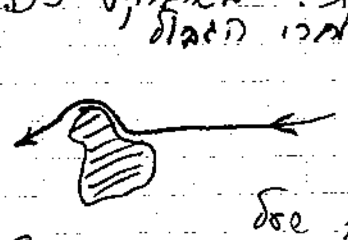
כזו נקראת זרימה פוטנציאלית - והיא יותר פשוטה מזרימה כללית.

4

<u>דוגמה 1.9</u> מטוס טס באוויר שקט. במערכת נחש המטוס ישנה זרימה אחידה (במהירות הפוכה למהירות המטוס) מלפני המטוס. בזרימה אחידה $\vec{\omega}=0$ ולכן לפי קלווין $\vec{\omega}=0$ גם בזרימה ליד המטוס ובעקבותיו (בהנחה שהזרימה היא ברוטרופית ואדיאבטית). כיוון שכך הזרימה היא פוטנציאלית לפי (1.68) בכל מקום.

ובאופן כללי זרימה אידיאלית ברוטרופית או בלתי דחיסה עם תנאי גבול של זרימה אחידה היא זרימה פוטנציאלית.

יש לסייג מסקנה זו כאשר הזרימה פוגשת אובייקטים מוצקים - מכשולים או דפנות. באובייקט כזה קווי זרימה שמגיעים אליו נעקבים אחרי הגבול עד שהם נאלצים להפרד ממנו.



סביב אותו קו זרימה לא ניתן לצייר לולאה שהיא כולה בזורם. לכן לא ניתן להשתמש במשפט קלווין להוכחת שעל אותו קו זרימה $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}$. בתוכו נוצרת ערבוליות מנקודת ההפרדה והלאה. לכן השובל של מטוסים וכו' בעלי ערבוליות. על זה עוד נדבר.

__דוגמה 1.10__ הזרימה סביב גוף מוצק המבצע תנודות הרמוניות בעלות אמפליטודה קטנה לעומת גודלו הוא בקירוב טוב זרימה פוטנציאלית. יהיה גודל הגוף l, ומהירותו

$$\vec{V} = \vec{u}\sin wt \tag{1.69}$$

נניח זרימה ברוטרופית כך ש- $p = p(\rho)$. נוכל, על כן, לכתוב משוואות אוילר כך:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\int\frac{p'\,d\rho}{\rho} - \vec{\nabla}\phi_M \tag{1.70}$$

ברור שהנגזרות של $\vec{v}$ הן מסדר u/l כי יש להניח שמהירות הזרימה משתנה באופן משמעותי מצד אחד לשני. על כן

$$|\vec{v}\cdot\vec{\nabla}v| \sim u^2/l \tag{1.71}$$

ומצד שני ברור שסקלת הזמן של שינוי $\vec{v}$ הוא w^{-1} כך ש

$$\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right| \sim uw \tag{1.72}$$

אמפליטודת התנודות הוא $\sim u/w$ ונאמר ש- $u/w \ll l$ לכן

$$\frac{|\vec{v}\cdot\vec{\nabla}v|}{\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right|} \sim \frac{u}{lw} \ll 1 \tag{1.73}$$

על כן נזניח האבר $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}$ ב (1.70). ניקח קורל

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = 0$$

אבל $\vec{\omega}$ לא יכולה להיות בלתי תלויה בזמן כי יש תנודות. לכן $\vec{\omega}=0$, ו- $\vec{v}=\vec{\nabla}\phi$. כל האמור נכון גם כאשר $\rho = const.$

ל ϕ קוראים פוטנציאל המהירות. אם הזרימה פוטנציאלית בכל מקום, אין בה קווי זרימה סגורים על עצמם. כי אם היה כזה C

$$0 < \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint \nabla\phi\cdot dl = \Delta\phi = 0 \tag{1.74}$$

ונוצרת סתירה.

<u>דוגמה 1.11</u> שדה המהירות (קואורדינטות גליליות (ϖ,φ,z))

(1.75) $$\vec{v} = \frac{A}{\varpi}\hat{\varphi} \quad ; \; A \text{ קבוע}$$

כולו בכוון אזימוטלי - ולכן סגור על עצמו. אמנם

(1.76) $$\frac{A}{\varpi}\hat{\varphi} = \vec{\nabla}(A\varphi) = \frac{\hat{\varphi}}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A\varphi)$$

אבל $A\varphi$ אינו חד-ערכי כי $\varphi, 2\pi+\varphi$ נכון שייכים לאותה נקודה. וישנה סינגולריות בשדה המהירות ב $\varpi=0$ שהוא רק סינגולריות של $\phi=A\varphi$. לכן אין כל השדה נגזר מפוטנציאל. אפשר לראות זה בדרך אחרת. על הלולאה $\varpi=\text{const.}$

(1.77) $$\Gamma = \oint \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int \frac{A}{\varpi}\varpi\, d\varphi = 2\pi A$$

כיון ש-Γ לא משתנה עם ϖ, ודעיון שכל הערבוליות ממוקמת על הציר, ולכן יש רק ערבוליות מהצורה

(1.78) $$\vec{\omega} = 2\pi A\, \delta^2(\vec{x})$$

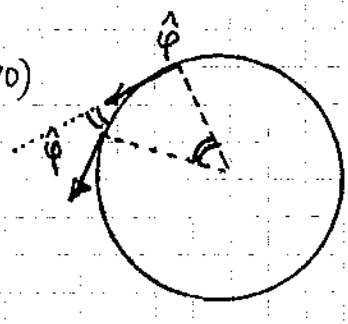
כך ששדה המהירות אינו פוטנציאלי בכל מקום. שדה זרימה מהטיפוס (1.75) נקרא וורטקס או מערבולת. נבדוק שהוא מקיים משוואת אוילר. ברור ש $\partial\vec{v}/\partial t = 0$

(1.79) $$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial\varpi}, \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

לכן

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{A}{\varpi^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{A}{\varpi}\hat{\varphi}\right) = \frac{A^2}{\varpi^3}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}$$

(1.80)



$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi} = -\hat{\varpi}$$

משוואת אוילר תתקיים אם

$$-\frac{A^2}{\varpi^3}\hat{\varpi} = -\vec{\nabla}p/\rho$$

וזה דורש

5 (1.81) $$\frac{p'\,d\rho}{\rho\, d\varpi} = \frac{A^2}{\varpi^3}$$

שבהחלט אפשרי.

אם וורטקס כזה לעיל נמצא בתוך זרימה של אחידה, הוא כמובן יתקדם. ניתן להראות (הלמהולץ)

שקו הוורטקס נושא עם הזרימה. נצייר לולאה קטנה מסביב לוורטקס, וכמה לולאות שלא מקיפות אותו. לפי משפט קלווין כל לולאה שומרת על הסירקולציה שלה משך הזרימה המעוותת את הוורטקס. אלה שלא היקיפוהו מלכתחילה ישארו עם סירקולציה אפס, כלומר, לא מקיפות שום ערבוליות. אלה שהקיפה את הוורטקס מראש כל הזמן על אותה סירקולציה, כלומר היא מקיפה תמיד דבר עם ערבוליות. המסקנה: קוו הערבוליות נשאר צר ונשאה עם הזרימה. חוזק הוורטקס שנמדד ע"י הסירקולציה של לולאה מסביבו נשמר אפילו אם הוא מתעקם או מתעוות. ניתן גם להוכיח דברים כאלה מתוך משוואה (1.61) בלי להזדקק למשפט קלווין - כך באמת עשה הלמהולץ.

בסכום: זרימה אידיאלית וברוטרופית בתנאי גבול מתאימים תהיה זרימה פוטנציאלית. אבל אם בהתחלה היו בה וורטקסים, הם נשארו. ניתן להסתכל על זרימה עם ערבוליות כזרימה פוטנציאלית שמשובצים בה וורטקסים בצפיפות רבה.

1. משפט ברנולי

כראשית כל נגדיר באופן מדויק "קו זרימה". נתון שדה מהירות $\vec{v}$, הקווים האינטגרליים שלו בכל זמן הם קווי הזרימה (streamlines). ויותר מתמטית, אם קו זרימה יש לו משוואה

$$\vec{x} = \vec{l}(s) \quad ; \quad s \text{ אורך}$$

אזי

$$\frac{dl_x/ds}{v_x} = \frac{dl_y/ds}{v_y} = \frac{dl_z/ds}{v_z} \tag{1.82}$$

אז גודל הווקטור $d\vec{l}/ds$ מכוון כך ש

$$\left(\frac{d\vec{l}}{ds}\right)^2 = 1 \tag{1.83}$$

כך שבאמת s הוא אורך לאורך קו הזרימה. כאשר אין $\vec{v}$ תלוי ב-t, אלמנטי הנוזל נשארים כל אחד על קו זרימתו. זה כבר לא נכון כאשר יש שינוי בזרימה עם הזמן; אז האלמנטים עוברים מקוו זרימה למשנהו.

כפי שראינו, בזרימה אידיאלית משוואת אוילר יכולה להכתב [עיין (1.52)]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} = -\vec{\nabla}\left(\phi_N + \tfrac{1}{2}\vec{v}^2\right) - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \tag{1.84}$$

כאן נקח סיטואציה סטציונרית כך ש $\partial\vec{v}/\partial t = 0$. בנוסף נכפול סקלרית ב $d\vec{l}$, אינפיניטסימלי על אורך בכוון $\vec{v}$ ונגדיר הדיפרנציאל

$$D \equiv d\vec{l}\cdot\vec{\nabla} \tag{1.85}$$

ברור מ (1.84) ש

$$D\left(\phi_N + \tfrac{1}{2}v^2\right) + \frac{Dp}{\rho} = 0 \tag{1.86}$$

כאשר הזרימה יכולה להיחשב בלתי דחיסה אפשר להכניס ρ בתוך הנגזרת ואז מקבלים

$$D\left(\phi_N + \tfrac{1}{2}v^2 + p/\rho\right) = 0 \tag{1.87}$$

כך שהכמות בסוגריים קבועה לאורך כל קו זרימה. זוהי הצורה המקורית של משפט ברנולי. כאשר הזרימה דחיסה יש לזכור ש $p = p(\rho, s)$. אך הזרימה אידיאלית הרי ש s קבועה לאורך קווי זרימה. אז מגדירים האנטלפיה ליחידת מסה

$$h = u + pV = u + p/\rho \tag{1.88}$$

לאור חוק הראשון (1.19) יש לנו

$$Dh = TDs + VDp = TDs + Dp/\rho = Dp/\rho \tag{1.89}$$

ואז נובע מ-(1.86) שעל כל קו זרימה

$$\phi_N + \tfrac{1}{2}v^2 + h = \text{const.} \tag{1.90}$$

אם כמו בדוגמה (1.7) הזרימה היא רק ברוטרופית ולא אדיאבטית אפשר לכתוב $p = p(\rho)$ ו- $Dp/\rho = p'D\rho/\rho$ כך שמ-(1.85)

$$\phi_N + \tfrac{1}{2}v^2 + \int p'\,d\rho/\rho = \text{Const.} \tag{1.91}$$

אלה שלושת הגרסאות של משפט ברנולי.

__דוגמה (1.12)__ מים זורמים ויורדים במכל וזוג מברזים. לחץ המים שווה בכל מקום ללחץ האטמוספרי שלא משתנה כמעט עם גובה. עם $\rho = \text{const}$ ו $\phi_N = gz$ מקבלים

$$\frac{1}{2}\vec{v}^2 + gz = |const_1| \qquad (1.92)$$

אם A הוא חתך הזרם החפשי הרי ששמור מסה אומר

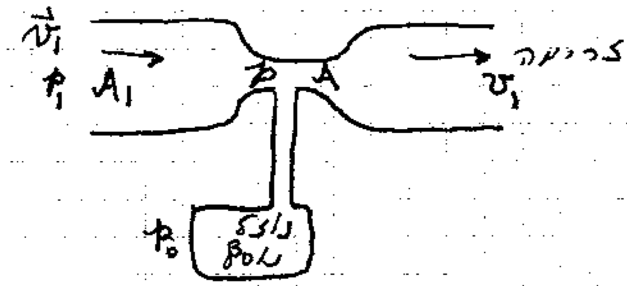
$$\rho A v = |const_2| \qquad (1.93)$$

לכן

$$A = \frac{|const|}{\sqrt{2|const_1| - 2gz}} \qquad (1.94)$$

שמראה שעובי הנוזל הולך ופוחת כלפי מטה.

<u>דוגמה 1.13</u> מים זורמים בלחץ מעל האטמוספרה בצינור ונדרש להזריק לתוכם נוזל אנטיביוטי הבא ממיכל בלחץ אטמוספרי! אפשר לארגן זה כך



משפט ברנולי אומר עבור קו זרימה האמצעי

$$\frac{1}{2} v_1^2 \rho + p_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 + p$$

רוצים $p < p_0$ אבל נתון $p_1 > p_0$. לכן יש לדרוש

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A}\right)^2 - 1 \right] > p_1 - p_0 \qquad (1.95)$$

שתמיד ניתן לקיים עם A מספיק קטן.

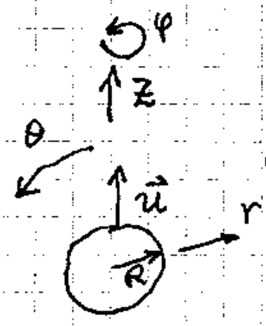
<u>דוגמה 1.14</u> כדור בעל רדיוס R נע במהירות אחידה $\vec{u}$ בתוך נוזל אידיאלי בלתי דחיס שנמצא במנוחה באין-סוף. ניתן לחשב שדה $\vec{v}$ סביב הכדור כך.

ראשית כל עוברים למערכת הכדור, שבה מהירות הנוזל באין-סוף הוא

$$\vec{v}(z \to \infty) = -\vec{u} \qquad (1.96)$$

מהתנאי "בלתי דחיס" נקבל $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. כעת, משפט קלווין ביחד עם תנאי הזרימה האחידה בהתחלה מפשט לנו

לכתוב $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}$, ואז $\Delta\phi = 0$ שהיא משוואת לפלס. נפתח בקואורדינטות כדוריות. הלפלסיאן יש לו הצורה הבאה



$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \tag{1.97}$$

ידוע שהפתרון הכללי של $\Delta\phi = 0$ בקואורדינטות אלה הוא

$$\phi = \sum_{lm}\left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{1.98}$$

$$l = 0, 1 \ldots \quad , \quad -l \le m \le l$$

אנו דורשים ש- ב- $r \to \infty$

$$\phi \to -|\vec{u}|\, z \tag{1.99}$$

כך שנקבל $\vec{v} \to -\vec{u}$.

מבין האיברים r^l ב-(1.98) רק זה עם $l=1$ $m=0$ מתאים לזה כי

$$Y_{10} \propto \cos\theta$$

אם כן נקבל $A_{lm} = 0$ חוץ מ $l=1, m=0$.

$$\phi = -|\vec{u}|\, r\cos\theta + \sum_{lm} B_{lm}\, r^{-(l+1)}\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{1.100}$$

דורשים גם ש $v_n\big|_R = 0$ (ראה (1.42)), כלומר

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_R = -|\vec{u}|\cos\theta - \sum_{lm}\frac{(l+1)B_{lm}}{R^{l+2}}\, Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0 \tag{1.101}$$

כל Y_{lm} עם $m \neq 0$ יש לה פקטור תלוי ב-φ שאינו בהופעות האיבר הראשון ב-(1.101) לאפס. לכן צריך לקחת $B_{lm} = 0$ עבור $m \neq 0$. חוץ מזה Y_{l0} נראית כמו $\cos\theta$ רק עבור $l=1$ כך שצריך לקחת $B_{l0} = 0$ כל עוד $l \neq 1$, וברור ש

$$B_{l0} = -\frac{|\vec{u}|}{2} R^3 \frac{\cos\theta}{Y_{10}(\theta)} \tag{1.102}$$

ולכן

(1.103) $$\phi = -|\vec{u}|\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\cos\theta$$

(1.104) $$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$ אבל

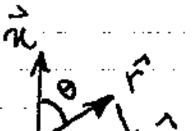
לכן

(1.105) $$\vec{v} = -|\vec{u}|\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\,\hat{r} + |\vec{u}|\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta}$$

זה במערכת המנוחה של הכדור. במערכת שבה הנוזל במנוחה ב-∞ יש להוסיף $\vec{u}$, ולכן

(1.106) $$\vec{v}' = |\vec{u}|\cdot\frac{R^3}{r^3}\left(\cos\theta\,\hat{r} + \frac{1}{2}\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

כי



(1.107) $$\vec{u} = |\vec{u}|\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

על כן אפשר לכתוב $\vec{v}'$ כשדה דיפולי:

(1.108) $$\vec{v}' = \frac{R^3}{2r^3}\left[3(\hat{r}\cdot\vec{u})\hat{r} - \vec{u}\right]$$

ג. זרימה פוטנציאלית

מהדוגמה הזו לומדים אנו שכל זרימה בלתי דחיסה של נוזל אידיאלי עם תנאים אחידים במקור הזרימה ניתן לתאר כזרימה פוטנציאלית [(1.68)] כאשר פוטנציאל המהירות הוא פונקציה הרמונית (מקיימת משוואת לפלס)

(1.109) $$\Delta\phi = 0$$

הבעיה היא, אם כן, יותר פשוטה כי יש לפתור רק משוואה אחת - והיא משוואה שרבים מפתרונותיה ידועים. באופן טבעי תנאי הגבול שמטילים עליה בהידרודינמיקה הם תנאי גבול נוימן כי לפי (1.42) בגבול קשיח

(1.110) $$(\vec{\nabla}\phi)_n = 0$$

כעת נקשר נושא זרימה הפוטנציאלית עם משפט ברנולי. אמרנו שהקבוע ב-(1.91) יכול להיות שונה לכל קו זרימה. בזרימה שהיא גם פוטנציאלית נעשה הקבוע אחד.

ב-(1.84) בא׳ שמאל נכתוב $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi(\vec{x},t)$. אם מדובר בזרימה בלתי דחוסה נחליף

$$-\frac{\nabla p}{\rho} \rightarrow -\vec{\nabla}(p/\rho)$$

ואם הזרימה הוא ברוטרופית נחליף

$$-\nabla p/\rho \rightarrow -\vec{\nabla}\int p' d\rho/\rho$$

במקרה של זרימה אוזנטרופית נוכל עפ"י (1.89) להחליף

$$-\vec{\nabla}p/\rho \rightarrow -\vec{\nabla}h$$

על כן

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi_N + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + W\right) = 0 \qquad (1.111)$$

כאשר

$$W = \begin{cases} h & \text{איזנטרופית} \\ p/\rho & \text{בלתי-דחוסה} \\ \int p' d\rho/\rho & \text{ברוטרופית} \end{cases}$$

המשוואה (1.111) אומרת ש

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi_N + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + W = f(t) \qquad (1.112)$$

אפשר אבל להחליף

$$\phi(\vec{x},t) \rightarrow \phi'(\vec{x},t) \equiv \phi(\vec{x},t) + \int^t f(t')dt' \qquad (1.113)$$

ואז

$$\phi_N + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + W = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1.114)$$

זה נכון גם כאשר המצב אינו סטציונרי. במקרה של מצב סטציונרי דרוש ש $\partial\vec{v}/\partial t \rightarrow 0$ ולכן

$$\phi \rightarrow \eta(\vec{x}) + \chi(t)$$

אבל (1.114) מראה ש χ חייבת להיות לינארית בזמן:

$$\phi_N + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + W = \text{const.} \qquad (1.115)$$

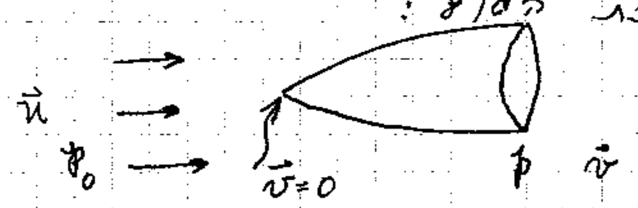
← אותו קבוע לכל קו זרימה

תרגיל 1.7 בדוגמה 1.14 הלחץ במעלה בזרימה הוא p_0. חשב פלוס הלחץ על פני הכדור. האם זה תלוי במערכת היחוס (כדור במנוחה או נע)? מהן כח ההתנגדות שהזורם מפעיל על הכדור?

תרגיל 1.8 פתור את האנלוג של דוגמה 1.14 ותרגיל 1.7 עבור גליל הנע בניצב לצירו במהירות אחידה $\vec{u}$.

מה קורה כאשר גוף נע בזורם במהירות משתנה? אם הזורם בלתי דחיס והתנועה מאפשרת זרימה פוטנציאלית משוואה (1.109) תקפה. כמובן שפתרון כללי של משוואה זו לא תלוי בזמן אלא דרך מקדמי הפונקציות השונות שלו, כגון ה A_{lm} ב (1.98). מקדמים אלה נקבעים ע"י תנאי הגבול (1.110). ברור שרק $\vec{u}$ באותו רגע משפיע עליהם, ולא, למשל, $\dot{\vec{u}}$. על כן צורת הזרימה ברגע מסוים תלויה רק במהירות הגוף באותו רגע, לא בתאוצתו ולא בהיסטוריה התנועה.

כאשר גוף נע בזורם עשויה להופיע נקודה על פני הגוף בה $\vec{v}=0$. למשל, לגוף עם סימטריה צירית במערכת הגוף:



בכל פני הגוף $v_n=0$. מסימטריה לא יכול להיות רכיב טנגנציאלי של $\vec{v}$ בקודקוד, ולכן $\vec{v}$ כולה מתאפסת שם. גם בלי הסימטריה עשויה להיווצר נקודת סטגנציה כזו. לפי משפט ברנולי בצורתו (1.115) (ובהזנחת שדה הכבידה) בזרימה פוטנציאלית בלתי דחיסה הלחץ p הוא מקסימלי בנקודת הסטגנציה:

$$p_s = p_0 + \frac{\rho}{2}|\vec{u}|^2 \qquad (1.116)$$

למדים מכאן שני דברים. אם רוצים למדוד ממטוס את לחץ האוויר בסביבה עדיף למדוד הלחץ בחזית ולתקן עבור $\frac{\rho}{2}|\vec{u}|^2$. ועוד דבר: גוף הנדחף לתוך זורם מרגיש לחץ שבחלקו לא לחץ מולקולרי אלא "לחץ דחף" מתורה הקינטית. ונדגיש שלחץ גם המולקולרי הוא מסדר ρc^2 כאשר c הוא מהירות הקול. לכן לחץ הדחף נעשה חשוב רק כאשר התנועה מתקרבת למהירות הקול. בתנועה תת-קולית הלחץ הוא בעיקר מולקולרי.

כל זה מבוא אותנו לשאלה, באיזה תנאים אפשר להתייחס לזרימה כאל זרימה בלתי דחיסה שבה ניתן להשתמש במשוואת לפלס עבור ϕ ובצורה השניה של משפט ברנולי. בלתי דחיס פירושו ש

$$\delta\rho/\rho \ll 1 \qquad (1.117)$$

משך הזרימה. כאשר הזרימה אדיאבטית

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho = c^2 \delta\rho \qquad (1.118)$$

כאשר c מהירות הקול. בהעדר שדה כבידה, אבל בסיטואציה סטציונרית רואים מ (1.86) ש

$$\delta p = \frac{1}{2} \rho\, \delta v^2 \qquad (1.119)$$

משתי המשוואות מקבלים

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\delta v^2}{c^2} \qquad (1.120)$$

אם הזרימה תת-קולית בהרבה, אגף הימין קטן בהשוואה לאחדה ויש לנו $\delta\rho/\rho \ll 1$, אזי זרימה היא בלתי דחיסה. אבל אם הזרימה על-קולית אין בטחון בזה.

אם הזרימה רלטיביסטית אפשר לחזור על הדיון הנ"ל עם ההבדל ש c^2 מסמל $\partial p/\partial \varepsilon$ של $p(\varepsilon)$. זרימה איטית בהשוואה ל c תהיה בלתי דחיסה.

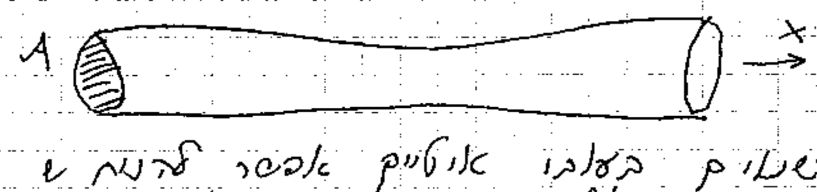
אם הזרימה לא סטציונרית אין משפט (1.86) תקף אך לא סטציונרי הוא מושג יחסי. תהיה τ סקלת הזמן של שינוי הכמויות השונות. אם נוצרת דחיסה קלה, היא תתפשט בזורם במהירות הקול c. בזמן τ "נמרחת" הדחיסה על פני אזור בגודל $c\tau$. אם $c\tau$ גדול בהשוואה ל L סקלה המרחבית לשינוי בכמויות השונות, הרי שהקול גורם לאחידות בזורם. לכן המסקנה שהזרימה בלתי דחיסה תהיה תקיפה אם הזרימה תת-קולית ובנוסף

$$\frac{L}{\tau} \ll c \qquad (1.121)$$

7

ח. זרבובית דה-לבל

כעת בעזרת משפט ברנולי נחקור זרימה אדיבטית (או ברוטרופית) בצינור בעל חתך מעגלי אך משתנה בצורה הבאה:



אם השינויים בעוביו איטיים אפשר להניח ש $\vec{v}$ מקבילה לציר הצינור ולהזניח רכיבים רחביים.

והיה $A(x)$ שטח חתך הצינור. אז שימור מסה נותן

$$\rho v A = \text{const.} \qquad (1.122)$$

כך ש

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad (1.123)$$

אינטגרציה נוספת נקבל ממשוואת אוילר

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} \simeq v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1.124)$$

כאן הזנחנו האברים $v_y\frac{\partial v}{\partial y}$ ו- $v_z\frac{\partial v}{\partial z}$ הם קטנים מהאבר $v\frac{dv}{dx}$ בפקטור השווה לשיפוע של דופן הפיה ברבוע.

כעת אם הזרימה אדיאבטית

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho = c^2 d\rho \qquad (1.125)$$

ואם היא ברוטרופית יש להתייחס ל- c^2 ב- $dp/d\rho$ שיש לה ממדים של מהירות ברבוע ואפשר לחשוב עליה כעל מהירות קול (אמיתי) ברבוע. אזי אנו נגדיר את מספר Mach לפי

$$M = \frac{v}{c} \qquad (1.126)$$

נקבל מ (1.124) ש

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2}\frac{d\rho}{\rho} \qquad (1.127)$$

לאורך הזרימה. רואים שוב שאם הזרימה תת-קולית ($M \ll 1$) אזי שינוי היחסי של ρ קטן לעומת זה של v, כלומר זרימה בלתי-דחיסה. ונציב (1.127) ב (1.123) לקבל

$$(1 - M^2)\frac{dv}{v} = -\frac{dA}{A} \qquad (1.128)$$

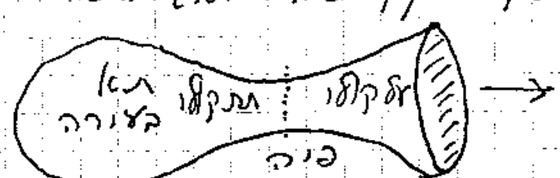
באיזור בו הפיה מתרחבת $0 < dA/dx$. אם יש גם $M < 1$ (תת-קולית) רואים שהמהירות קטנה עם x. אולם אם הזרימה על-קולית ($M > 1$) הזרימה מואצת בשעה שהצינור מתרחב. זה נראה מוזר כי האינטואיציה שלנו נבנתה בתחום של זרימה בלתי-דחיסה. וכפי שראינו כזו יכולה להיות אלא בתחום התת-קולי.

הסתכלות מדגישה הקשר בין דחיסות לעל-קוליות ולהיפך אפשר לקבל מ (1.128). כאשר $M<1$ יש ל- dv ו- dA הם בעלי סימן הפוך, ולכן אפשר ששני האיברים האחרונים ב (1.123) יתקזזו. אז $dp \simeq 0$. לכן זרימה תת-קולית יכולה להיות בלתי דחיסה. ברור שהאפשרות נעלמת ברגע ש $M>1$ אז איבר הראשון ב (1.123) אינו זניח. כלומר זרימה על-קולית היא תמיד זרימה דחיסה.

בסיכום:

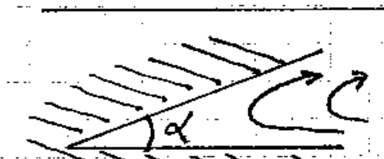
	$dA/dx > 0$	$dA/dx < 0$
$M < 1$	$dv/dx < 0$	$dv/dx > 0$
$M > 1$	$dv/dx > 0$	$dv/dx < 0$

נגיד שרוצים להאיץ זרימה תת-קולית לעל-קולית. זה אומר שצריך $dv/dx > 0$ גם ב $M<1$ וגם ב $M>1$ ולפי הטבלה זה דורש שסימנו של dA/dx יתחלף כאשר המהירות עוברת את $M=1$ (כפי שראינו גם מ (1.128)). שינוי הסימן של dA/dx בא לפני התחלף ולכן A הוא מינימום כאשר $M=1$. מתבקשת, על כן, פיה מסוג הזה



המבנה הזה אינו מבטיח מעבר קולי (sonic transition) כי לפי (1.128) יתכן שמינימום A מתלכד רק מקסימום של v, הכל בתחום $M<1$.

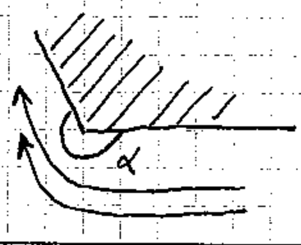
בעיקרון אפשר להשתמש בפיית דה-לבל להאט זרימה על-קולית לתת-קולית. העדר חיכוך אומר שפתרון ההפוך בזמן לזה שתארנו אפשרי כפתרון. אבל למעשה יש תמיד קצת חיכוך, וכתוצאה הפתרון ההפוך בזמן עם האטה הוא בלתי יציב להתהוות גלי הלם. אפשרות כזו חשובה באנלוג לפיית דה-לבל באסטרופיזיקה כאשר כח הכבידה עושה את התפקיד של הפיה בזרימה ליד גוף כבדי.



__תרגיל 1.9__ זרימה סטציונרית בלתי-דחיסה האחידה ב ∞ פוגעת בזווית בין 2 דפנות כבתמונה. מצאו את שדה המהירות. מה

קורה בנקודת העצור ?

<u>תרגיל 1.10</u> אותה בעיה כמו בתרגיל הקודם אבל עם הקונפיגורציה בתמונה.
מה קורה בקודקוד ?



<u>ט- בעיות דו-מימדיות ופונקציות מרוכבות</u>

סעיף ח׳ תיאר בעיה חד-ממדית. בתרגילים 1.9 ו- 1.10 הבעיה היתה דו-ממדית. עוד דוגמה של בעיה דו-ממדית היתה דוגמה 1.14 שבה הקואורדינטה φ נופלת מהבעיה. כעת נתאר שיטה להתמודד עם בעיות דו-ממדיות של זרימה בלתי-דחוסה בעזרת התאור של משתנים מרוכבים.

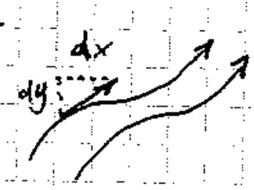
נשתמש בקואורדינטות x,y קרטזיות. בלתי-דחיסות אומרת ש

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (1.129)$$

אם נגדיר פונקציה $\psi(x,y)$ כך ש

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \qquad (1.130)$$

אזי (1.129) מתקיימת אוטומטית. ψ נקראת פונקציית הזרימה כי, אם הגדל (dx,dy) וקטור משיק לקו זרימה, אזי השינוי של ψ לאורך אלמנט על קו זרימה הוא



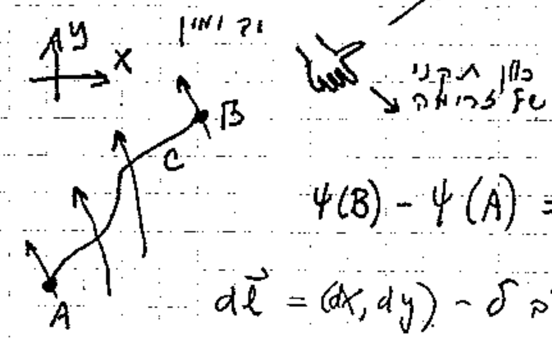
$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= -v_y\, dx + v_x\, dy \end{aligned} \qquad (1.131)$$

אבל התנאי על המשיק הוא

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \qquad (1.132)$$

לכן $d\psi = 0$. זאת אומרת ψ קבועה על כל קו זרימה.

ניקח עקומה לא סגורה C החותכת קווי זרימה: ההפרש של ψ בין שתי קצותיה הוא



(1.133) $$\psi(B)-\psi(A)=\int_A^B d\psi=\int_A^B\left(v_x\,dy-v_y\,dx\right)$$

כעת הווקטור $(dy,-dx)$ ניצב ל- $d\vec{l}=(dx,dy)$
אבל יש לו אותו אורך.
לכן נגדיר

(1.134) $$d\vec{l}_\perp\equiv(dy,-dx)\;;\quad \vec{v}=(v_x,v_y)$$

ואז

(1.135) $$\psi(B)-\psi(A)=\int_A^B\vec{v}\cdot d\vec{l}_\perp=Q$$

כאשר Q הוא נפח הזורם העובר בין A ל- B ביחידת זמן. על כן הפרשי ψ נותנים תמונה של היקף הכמות חומר הזורם בין קווי זרימה המתאימים. אפשר לבדוק שהסימנים בסדר. בתמונה שלנו v_x שלילית ו- v_y חיובית ולכן $\psi(B)-\psi(A)$ שלילי עפ"י (1.133). וזה שאכן Q שלילי כפי שמתבקש מזה שהזרימה בכיוון הלא תקני לפי כלל יד ימין.

מאין מקבלים ψ? מציבים המרחש (1.130) במשוואות אוילר הבלתי ממדית. המשוואה היא מסובכת ומאד לא ליניארית כצפוי. במקום לעבוד איתה, נניח שהזרימה היא גם פוטנציאלית:

(1.136) $$v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

קשרים כאלה בין שתי פונקציות של x ו- y נקראים משוואות Cauchy-Riemann. מתורת המשתנים המרוכבים ידוע שהפונקציה

(1.137) $$f(z)=f(x+iy)\equiv\phi(x,y)+i\,\psi(x,y)$$

היא פונקציה אנליטית, כלומר שנגזרתה בנקודה שווה לכל כיוון של התקרבות הנקודות המגדירות הנגזרת. ולכן

(1.138) $$\frac{df}{dz}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=v_x-iv_y$$

f נקראת הפוטנציאל המרוכב.

מעניין לחשב עבור מסלול C סגור האינטגרל $\oint_C f'\,dz$!

(1.139) $$\oint f' dz = \oint (v_x - i v_y)(dx + i dy) =$$

$$= \oint_C (v_x dx + v_y dy) + i \oint_C (v_x dy - v_y dx)$$

האינטגרל הממשי הוא הסירקולציה סביב C. כיוון שאנו מניחים זרימה פוטנציאלית נשים אותו לאפס. לפי הדיון (1.133)-(1.135) האינטגרל השני הינו שטף הנוזל מחוץ ללולאה C. כדי שזה לא יתאפס צריכים להיות מקורות חומר בתוך C. אם זה המצב הרי ש $\oint d\psi$ אינו מתאפס, מה שאומר שפונקציית הזרימה אינה חד ערכית.

כעת לפי משפט קושי

(1.140) $$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f' dz = \sum_j r_j$$

כאשר r_j הן שאריות הפונקציה f' בקטבים הנמצאים בתוך C. לכן נוכל לכתוב $iQ = 2\pi i \sum_j r_j$ או

(1.141) $$Q = 2\pi \sum_j r_j$$

כלומר כאן קשר בין קטבים של f' ומקורות חומר. אם אין קטבים בתוך C אין זרימה דרך C. לכן אפשר לזהות את המקורות עם הקטבים של f'.

<u>דוגמה 1.15</u> הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2} A z^2$ היא אנליטית בכל מקום. לכן אפשר לזהות $(A \in \mathbb{R})$

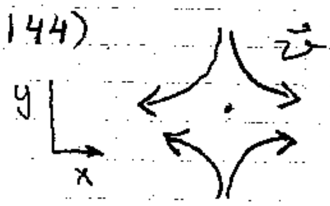
(1.142) $$\phi = \frac{1}{2} A (x^2 - y^2)$$
$$\psi = A x y$$

שמתארות אותו זרימה. לפי משפט טריוויאלי הן ϕ והן ψ מקיימות משוואת לפלס. למשל מ-(1.136)

(1.143) $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

לכן הזרימה הוא פוטנציאלית בלתי-דחיסה עם שדה מהירות

(1.144) $$v_x = Ax \qquad v_y = -Ay$$



קווי הזרימה הם היפרבולות:

$$xy = \text{const.}$$

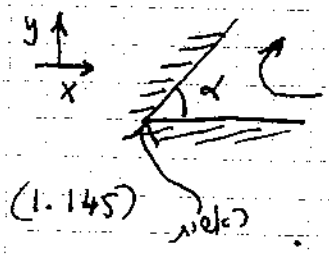
אנו מוצאים $f' = Az$ שאין לה קטבים. זה אומר שאין שטף התוצה משוק לעשק סגורה.

<u>תרגיל 1.11</u> מהו שדה הזרימה של $f(z) = \frac{i}{2} A z^2$? בכלל אם $f(z)$ מתארת זרימה מסוימת, במה תהיה שונה הזרימה המתוארת ע"י if ?

<u>תרגיל 1.12</u> מצא את פוטנציאל המרוכב המתאר הוורטקס של דוגמה 1.11. וורטקס יש סרקולציה. כיצד זה לא סותר הטענה שהזרימה היא פוטנציאלית כאשר היא מתוארת ע"י פוטנציאל מרוכב?

כאשר הזרימה גובלת בדופן מוצק, קו הזרימה שם חייב להיות מקביל לגבול. זאת אומרת ψ תהיה קבועה על הגבול. כל קו גבול רצוף מקבל ערך קבוע של ψ. אם יש רק אחד ניתן להגדיר ψ מחדש כך ש $\psi=0$ על הגבול. ברור שהוספת קבוע מרוכב ל-ψ אינו משנה את הזרימה. ללא תכונות אנליטיות של f נמצא שזרימה פוטנציאלית בלתי-דחיסה בקרבת דופן קשיחה תקבל פתרון אם נמצא פונקציה אנליטית שחלקה המדומה מתאפס על הגבול.

<u>דוגמה 1.16</u> נחזור על התרגיל 1.9 לפי משתנים מרוכבים.



(1.145)

ברור ש $f(z) = A z^n$ טוען הוא ממשית על ציר x בך ש $\psi=0$ כדרוש. ומה עם דופן השני? כיוון ש

$$z = r e^{i\theta}$$

אזי

$$f(z) = A r^n e^{in\theta}$$

ו-

(1.146) $$\psi = A r^n \sin(n\theta)$$

ψ מתאפס ב- $\theta = \alpha$ אם $n = \pi/\alpha$. לכן

(1.147) $$f(z) = A r^{\pi/\alpha} e^{i\pi\theta/\alpha}$$

וזה נותן

(1.148) $$\phi = A r^{\pi/\alpha} \cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$$

שממנו ניתן לקבל שדה המהירות. יש לשים לב:

$$v_r \sim r^{\pi/\alpha-1} \sim v_\theta \qquad (1.149)$$

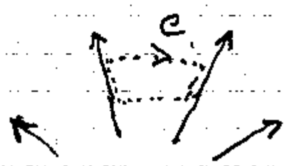
כך אם בתמונה $\alpha<\pi$, המהירות מתאפסת ב $r\to 0$,
אבל אם $\alpha>\pi$ (צורה מתאימה לזווית כמו בתרגיל 10.1),
אז $v\to\infty$ בקודקוד. ברור שהשדה נכון של זרימה בלתי-דחיסה
מתפרקת קרוב ל $r=0$ במקרה הזה, והזרימה שם
תהיה שונה מהמתואר.

9

---

1. בעיות עם סימטריה כדורית

כאשר הזרימה בעלת סימטריה כדורית אין ערבולות.
למשל



$$\oint_c \vec{v}\cdot d\vec{l} = 0$$

לכן אפשר תמיד לקחת $\vec{\nabla}\phi=\vec{v}$. ואם הזרימה הינה
בלתי-דחיסה אז

$$\Delta\phi = 0 \qquad (1.150)$$

בקואורדינטות כדוריות אפשר לכתוב זה

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \qquad (1.151)$$

מכיוון ש ϕ חייב להיות סופי ב $r=\infty$, הפתרון הוא

$$\phi = \frac{A}{r}; \qquad \frac{\partial A}{\partial r} = 0 \qquad (1.152)$$

כאשר יש תלות בזמן בתנאי הגבול, או שיש תנאי התחלה
סינגולריים, צריך לקחת $A=A(t)$.

<u>דוגמה 1.17</u> בנוזל בלתי-דחיס מטבילים כדור שמתנפח או
מתכווץ כך שרדיוסו הוא $R(t)$. הלחץ רחוק ממנו
הוא p_0. כיצד נראית הזרימה ומה הוא הלחץ על
פני הכדור?

נקח מ-(1.152)

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{A(t)}{r^2} \qquad (1.153)$$

אפשר לראות מיד שהזרימה משמרת מסה. נציב במשוואת אוילר

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (1.154)$$

$$-\frac{\dot{A}}{r^2} - 2\frac{A^2}{r^5} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (1.155)$$

נאינטגרל לפי r

$$\frac{\dot{A}}{r} + \frac{1}{2}\frac{A^2}{r^4} = -\frac{p}{\rho} + F(t) \qquad (1.156)$$

כאשר $r \to \infty$ אנו מקבלים. לכן $F = p_0/\rho$. את A אפשר לקבל מכך ש v_r ב $r=R(t)$ חייב להיות $\dot{R}$ (זכרו בעצם תנאי (1.43)). לכן

$$A = -R^2\dot{R} \qquad (1.157)$$

-ו

$$p(r,t) = p_0 + \rho\left[\frac{(R^2\dot{R})^{\cdot}}{r} - \frac{1}{2}\frac{R^4\dot{R}^2}{r^4}\right] \qquad (1.158)$$

והלחץ על הכדור הוא

$$P(t) = p(R(t),t) = p_0 + \rho\left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right] \qquad (1.159)$$

תרגיל 1.13 מדוע אי אפשר לקבל כל התוצאה (1.159) ממשפט ברנולי?

תרגיל 1.14 (קריסת ריילי-בסנט). בנוזל בלתי דחיס נוצר באופן פתאומי חלל כדורי ריק. מהי הזרימה? תן ביטוי אינטגרלי לזמן שלוקח לחלל להתמלאות.

יג. זרם האנרגיה בנוזל

כיצד רושמים חוק שימור האנרגיה לנוזל? (בסעיף ג ראינו איך כותבים שימור מסה). אם u הוא האנרגיה הפנימית ליחידת מסה, ברור שצפיפות האנרגיה בנוזל היא

$$\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho u \qquad (1.160)$$

נחשב עתה

$$(1.161)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac12\rho\vec v^2+\rho u\right)=\tfrac12\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec v^2+\rho\vec v\cdot\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)$$

ראשית כל נזכר מ (1.88) ש

$$(1.162)\quad \rho u=\rho h-p$$

כי הרי $V=1/\rho$, ולכן לאור (1.89)

$$(1.163)\quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)=\rho\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}h-\frac{\partial p}{\partial t}$$
$$=\rho T\frac{\partial s}{\partial t}+\cancel{\frac{\partial p}{\partial t}}+\frac{\partial\rho}{\partial t}h-\cancel{\frac{\partial p}{\partial t}}$$

כעת נציב משוואות אוילר באיבר השני באגף ימין של (1.161)

$$(1.164)\quad \rho\vec v\cdot\frac{\partial\vec v}{\partial t}=-\rho\vec v\cdot(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v-\vec v\cdot\vec\nabla p-\rho\vec v\cdot\vec\nabla\phi_N$$

אפשר, לפי (1.51) להחליף $\vec v\cdot(\vec v\cdot\vec\nabla)\vec v$ ב $\frac12\vec v\cdot\nabla\vec v^2$. אז כל זה (1.161) הופך ל

$$(1.165)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac12\rho\vec v^2+\rho u\right)=\left(\tfrac12\vec v^2+h\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}$$
$$-\tfrac12\rho\vec v\cdot\vec\nabla\vec v^2-\vec v\cdot\vec\nabla p-\rho\vec v\cdot\vec\nabla\phi_N$$

כעת ע"פ (1.39) נחליף $\rho T\frac{\partial s}{\partial t}$ ב- $-\rho T\vec v\cdot\vec\nabla s$ ושוב לפי (1.89) נוכל להחליף

$$(1.166)\quad -\rho T\vec v\cdot\vec\nabla s-\vec v\cdot\vec\nabla p\to-\rho\vec v\cdot\vec\nabla h$$

בנוסף נחליף ה $\partial\rho/\partial t$ באיבר הראשון באגף ימין ב $-\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)$ ואז נקבל

$$(1.167)\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac12\rho\vec v^2+\rho u\right)=-\vec\nabla\cdot\left[\rho\vec v\left(\tfrac12\vec v^2+h\right)\right]-\rho\vec v\cdot\vec\nabla\phi_N$$

כעת האיבר האחרון פה נכתב כך:

$$(1.168)\quad -\rho\vec v\cdot\vec\nabla\phi_N=-\vec\nabla\cdot(\rho\vec v\phi_N)+\phi_N\vec\nabla\cdot(\rho\vec v)$$
$$=-\vec\nabla\cdot(\rho\vec v\phi_N)-\phi_N\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

אם הפוטנציאל הניוטוני לא תלוי בזמן אפשר לכתוב את האבר האחרון כאן $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi_M)$ - ולהעבירו לאגף שמאל לכן

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2+\rho u+\rho\phi_M\right)=-\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h+\phi_M\right)\right] \qquad (1.169)$$

אנחנו רואים ש-$\rho\phi_M$ מתפקד כצפיפות אנרגיה גרביטציונית של הגוף, ו-$\rho\vec{v}\phi_M$ כזרם אנרגיה גרביטציונית, כאשר זרם אנרגית הזורם עצמו הוא $\rho\vec{v}(\frac{1}{2}v^2+h)$. מדובר גם כן, על חוק שימור אנרגיה כוללת שנכתב במשוואת רציפות. אפשר להוכיח שארגומנט הדיברגנס הוא זרם אנרגיה אם נחשב, בעזרת משפט גאוס, את קצב שינוי האנרגיה הכוללת בנפח V

$$\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2+u+\phi_M\right)\rho\, d^3x=\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2+u+\phi_M\right)\rho\right]$$

$$=-\int_{\partial V}\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2+h+\phi_M\right)\cdot d\vec{S} \qquad (1.170)$$

$$=-\int_{\partial V}\rho\vec{v}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2+u\right)\cdot d\vec{S}-\int_{\partial V}p\vec{v}\cdot d\vec{S}-\int_{\partial V}\rho\vec{v}\phi_M\cdot d\vec{S}$$

בשורה השניה מראה בברור ש $\rho\vec{v}(\frac{1}{2}\vec{v}^2+h+\phi_M)$ הוא זרם האנרגיה, כי ברוטו החוצה הוא קצב ירידת האנרגיה הכוללת. בשורה האחרונה אנו רואים שהחלק p של h הוא הקצב בו הלחץ של הנפח עושה עבודה במגע שטח מחוץ ל-V ולכן הוא קצב הקטנת האנרגיה הכוללת שלא בדרך ברוטו החוצה. זה מסביר מדוע בביטוי (1.160) מופיע h ולא u.

<u>תרגיל 1.15</u> מדוע אין חוק רציפות עבור האנרגיה כאשר הפוטנציאל תלוי בזמן? האם צפוי היה מבחינה פיזיקלית שיהיה חוק שימור אנרגיה לזורם בשדה כבידה משתנה בזמן?

<u>תרגיל 1.16</u> גזור משפט ברנולי ממשוואת הרציפות (1.169).

<u>יב. זרם התנע בזורם בלי כבידה עצמית</u>

נפנה עתה לגזירת משוואת רציפות עבור תנע. ברור שהתנע של אלמנט בעל נפח dV הוא $\rho\vec{v}dV$, ועל כן צפיפות התנע בזורם היא $\rho\vec{v}$, נתעניין בקצב שינויו

ρv_z:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) = \rho\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_z =$$

$$= -\rho\,\vec{v}\cdot\vec{\nabla} v_z - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho\frac{\partial \Phi_N}{\partial z} - \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\,v_z \tag{1.171}$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\,v_z) - \hat{z}\cdot\vec{\nabla}p - \rho\,\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\Phi_N$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\,v_z + p\,\hat{z}) - \rho\,\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\Phi_N$$

זה עדיין לא בצורת משוואת רציפות. לכן נגדיר הטנזור

$$\overleftrightarrow{\Pi} = \rho\vec{v}\vec{v} + p\,\overleftrightarrow{I} \quad \text{(טנזור מאמצים של זורם)} \tag{1.172}$$

כאן יש לנו כמות בת 9 רכיבים, למשל הרכיב Π_{xy} הוא $\rho v_x v_y + 0$ כי $\overleftrightarrow{I}$ נחשב טנזור היחידה במקביל למטריצת היחידה שהיא אלכסונית. ויש מושג של מכפלה סקלרית (מימין או משמאל) של טנזור עם וקטור

$$\overleftrightarrow{\Pi}\cdot\vec{v} \equiv \begin{pmatrix} \Pi_{xx}v_x + \Pi_{xy}v_y + \Pi_{xz}v_z \\ \Pi_{yx}v_x + \Pi_{yy}v_y + \Pi_{yz}v_z \\ \Pi_{zx}v_x + \Pi_{zy}v_y + \Pi_{zz}v_z \end{pmatrix} \tag{1.173}$$

$$\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{v}\cdot\overleftrightarrow{I} \tag{1.174}$$

כנ"ל יש מושג של דיברגנס טנזור

$$\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\Pi} = \begin{pmatrix} \partial\Pi_{xx}/\partial x + \partial\Pi_{xy}/\partial y + \partial\Pi_{xz}/\partial z \\ \partial\Pi_{yx}/\partial x + \partial\Pi_{yy}/\partial y + \partial\Pi_{yz}/\partial z \\ \partial\Pi_{zx}/\partial x + \partial\Pi_{zy}/\partial y + \partial\Pi_{zz}/\partial z \end{pmatrix} \tag{1.175}$$

וכמובן $\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{I} = 0$.

ברור עתה ש-(1.171) שקולה ל-

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_z) = -\hat{z}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\Pi}) - \rho\,\hat{z}\cdot\vec{\nabla}\Phi_N \tag{1.176}$$

עדיין צריך לשכתב האבר האחרון. נגדיר טנזור המאמצים

של הכבידה:

$$\overleftrightarrow{T} \equiv \frac{1}{4\pi G}\left(\vec\nabla\phi_N\,\vec\nabla\phi_N - \frac{1}{2}\overleftrightarrow{I}\,|\vec\nabla\phi_N|^2\right) \tag{1.177}$$

לפי (1.175)

$$\vec\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi G}\left(\vec\nabla\phi_N\,\Delta\phi_N + \vec\nabla\vec\nabla\phi_N\cdot\vec\nabla\phi_N - \frac{1}{2}\vec\nabla(\vec\nabla\phi_N\cdot\vec\nabla\phi_N)\right) \tag{1.178}$$

המכפלה $\vec\nabla\phi_N\cdot\vec\nabla\phi_N$ סימטרית ולכן ניתן לפרש הגרדיינט שלה כ-

$$\vec\nabla(\vec\nabla\phi_N\cdot\vec\nabla\phi_N) = 2\,\vec\nabla\vec\nabla\phi_N\cdot\vec\nabla\phi_N \tag{1.179}$$

וש, אם כן קבלנו ב-(1.178). כעת עפ"י משוואת פואסון (1.26) מקבלים (כאן אנו מניחים ש ρ הצפיפות הוא מקור השדה)

$$\vec\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = \rho\,\vec\nabla\phi_N \tag{1.180}$$

לכן (1.176) עוברת ל-

$$\hat z\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec v) = -\hat z\cdot\vec\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\Pi} + \overleftrightarrow{T}) \tag{1.181}$$

אבל כיוון שאין $\hat z$ כיוון מועדף, המשוואה על שלושת רכיביה צריכה להתקיים:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec v) = -\vec\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\Pi} + \overleftrightarrow{T}) \tag{1.182}$$

לזאת יש צורה של משוואת רציפות שכן

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec v\,d^3x = \int_V \frac{\partial(\rho\vec v)}{\partial t}\,d^3x = -\int_V \vec\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\Pi} + \overleftrightarrow{T})\,d^3x = -\int_{\partial V}(\overleftrightarrow{\Pi} + \overleftrightarrow{T})\cdot d\vec s \tag{1.183}$$

אנו מסיקים מכאן שאם $\hat n$ הוא וקטור יחידה כלשהו,

$$(\overleftrightarrow{\Pi} + \overleftrightarrow{T})\cdot\hat n \tag{1.184}$$

הוא שטף התנע בכיוון $\hat n$ (כמובן שטף זה הוא וקטור). יש לשים לב שבגלל שהטנזורים המומנט הם סימטריים, לא משנה אם מכפילים ב $\hat n$ מימין או משמאל.

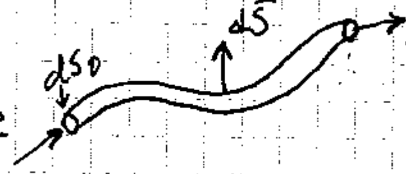
שטף התנע של הנוזל עצמו הוא רק $\hat{n}\cdot\vec{v}\vec{v}\rho$ בלבד.
מתווסף $\hat{n}p$ כוללת, בהפרעתו כזו, משנה את תנע
הנוזל ולכן הוא נכנס כרכיב בתרומת התנע. והתנהגות
השטף של הכבידה תורם $\hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}$ כי הכבידה משנה
את תנע הנוזל ולכן צריך התנע כולל תרומת הכבידה.

<u>דוגמה 1.18</u> נתונה זרימה סטציונרית שכל הכמויות בה אחידות בכיוון מסוים (נניח סימטריה), כולל Φ_N כך שאין שדה כבידה באותו כיוון. נמצא אנלוג לעיקרון ברנולי עבור תנע.

מהסטציונריות נובע (1.183) (נניח ש-$\hat{z}$ הוא כיוון הסימטריה)

$$\hat{z}\cdot\int_{\partial V}(\overleftrightarrow{\Pi}+\overleftrightarrow{T})\cdot d\vec{S}=0 \qquad (1.185)$$

ניקח הנפח כ"צינור" דק בעל חתך קטן שצירו מתלכד עם קו זרימה מסוים.
האיבר $\vec{v}\vec{v}\rho$ ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$
אינו תורם לאינטגרל
על הדופן כי $\vec{v}$
ניצב ל-$d\vec{S}$ שם.



$$\rho\vec{v}\vec{v}\cdot d\vec{S}=(\rho\vec{v})\,\vec{v}\cdot d\vec{S}=0 \qquad (1.186)$$

התרומה של $\overleftrightarrow{I}p$ ב-$\overleftrightarrow{\Pi}$ הוא $\hat{z}\cdot\int_{\partial V}p\,d\vec{S}$.
לפי המשפט (1.11) זה שווה ל-

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial z}\,d^3x \qquad (1.187)$$

שמתאפס מהנחה. כיוון שאין רכיב $\partial\Phi_N/\partial z$ בהנחה,

$$T_{zj}=-\frac{1}{8\pi G}|\nabla\Phi_N|^2\,\delta_{zj} \qquad (1.188)$$

על כן התרומה של הכבידה ל-(1.185) הוא

$$-\frac{\hat{z}}{8\pi G}\cdot\int_{\partial V}|\nabla\Phi_N|^2\,d\vec{S} \qquad (1.189)$$

ששווה ל-

$$-\int_V\frac{\partial}{\partial z}|\nabla\Phi_N|^2\,d^3x \qquad (1.190)$$

שגם מתאפס לפי הנחה. יוצא שרק $\vec{v}\vec{v}\rho$ תורם ל-(1.185)
וכל התרומה היא מקצוות הצינור.

בקצה העליון

$$d\vec{S} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} dS_1$$

ובתחתון

$$d\vec{S} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} dS_0$$

לכן (1.185) הופך ל

$$\int \rho v_z |\vec{v}| \, dS_1 - \int \rho v_z |\vec{v}| \, dS_0 = 0 \qquad (1.191)$$

לכל שמור מסה אומר ש $\rho|\vec{v}|dS$, כאשר dS חתך הצינור, הוא נשמר לאורך הצינור. ולכן ש

$$v_z\big|_1 = v_z\big|_0$$

כלומר הרכיב z של המהירות שמור לאורך כל קו זרימה.

כמו במשפט ברנולי, לא נוכל להסיק ש v_z הוא אחיד בכל המרחב עד שנניח שהזרימה היא גם פוטנציאלית.

<u>תרגיל 1.17</u> משפט ברנולי תקף גם כאשר יש מכשולים בדרך הזרימה. האם זה גם נכון למשפט בסעיף זה? נמק.

<u>תרגיל 1.18</u> זרם זורם בנוכחות שדה כבידה שכולו בכוון z. אם ישנה סימטריה של כל פרטי המערכת בכוונו x ו- y, מה ניתן לאמר על שדה המהירות? רמז: הנח סטציונריות.
