בסך הכל כתבנו L בקואורדינטות מסתובבות חדשות. לכן אפשר לקבל משוואות התנועה של אלה לפי משוואות לגרנג'.

$$(10)\quad \frac{\partial L''}{\partial \vec v''} = m(\vec v'' + \vec\Omega(t)\times\vec r'')$$

$$(11)\quad \frac{\partial L''}{\partial \vec r''} = m(\vec v''\times\vec\Omega + m(\vec\Omega\times\vec r'')\times\vec\Omega - \vec a'') - \nabla_{r''}V$$

על כן

$$(12)\quad m\frac{d\vec v''}{dt} = -\nabla_{r''}V - m\vec a'' + \overbrace{2m\vec v''\times\vec\Omega(t)}^{\text{כח קוריוליס}} + m\vec r''\times\dot{\vec\Omega} + \underbrace{m(\vec\Omega\times\vec r'')\times\vec\Omega}_{\text{כח צנטריפוגלי}}$$

מלבד הכח ∇V - המוכר יש כאן 4 כוחות פקטיביים: הפקטיבי $m\vec a''$ מאופיו הלא אינרציאלי של המערכת. בגלל משוואה הקווית וכבר הזכרנו. כח הקוריוליס ניצב לציר הסבוב והוא תלוי ב $\vec v''$, מה שגורם לו להפוך סימן כאשר המהירות הופכת סימן. הוא אנלוגי לכח המגנטי. האבר הרביעי קיים רק כאשר גם ניצב לציר הסבוב, וקיים עבור סבוב לא אחיד בלבד. הכח הצנטריפוגלי גם הוא ניצב לציר הסבוב, אבל רבועי ב Ω, וזה אומר שהוא שווה לסבוב קדימה או אחורה.

נתרכז במקרה הפשוט $\vec a''=0$ ו- $\dot{\vec\Omega}=0$. אז (10) ברור ש

$$(13)\quad \vec p'' = m(\vec v'' + \vec\Omega\times\vec r'')$$

כמו בנוכחות שדה מגנטי יש הבדל בין תנע קנוני וקינמטי. אבל ברור לפי (8) ש (נזכור) כאן

$$(14)\quad \vec p'' = m\vec v'$$

והאנרגיה במערכת המסתובבת היא

$$(15)\quad E'' = \vec p''\cdot\vec v'' - L'' = \frac{1}{2}m\vec v''^2 - \frac{1}{2}m(\vec\Omega\times\vec r'')^2 + V$$

כיוון שאין L'' תלוי ב t מפורשות כש $\dot{\vec\Omega}=0$ ו- $\vec a''=0$, אז E'' שמורה ונקראת אנרגיית יעקבי. חוץ מהאנרגיה הפוטנציאלית היא כוללת "אנרגיה צנטריפוגלית" שהיא שלילית (דוחה). אינטרפרטציה נוספת: ניתן במקרה ש $\vec u=0$ - אין הפרש בין המהירויות הקוויות של K ו- K'' ולכן $\vec v=\vec v'$. נגדיר התנע הזוויתי

$$(16)\quad \vec L'' \equiv \vec r''\times\vec p'' = \vec r''\times m\vec v = \vec L$$

כי $\vec r''$ ו- $\vec r$ הם אותו וקטור (יש רק סבוב)

לד

כעת

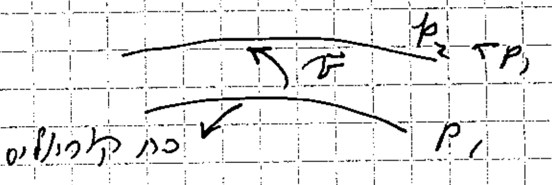
$$E'' = \tfrac{1}{2} m \left(\vec{v}'' + \vec{\Omega} \times \vec{r}''\right)^2 - m \vec{v}'' \cdot \vec{\Omega} \times \vec{r}'' - m \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}''\right)^2 + V \tag{17}$$

$$= \tfrac{1}{2} m \vec{v}''^2 - m \vec{\Omega} \cdot \left(\vec{r}'' \times \vec{v}''\right) - m \vec{\Omega} \cdot \vec{r}'' \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}''\right) + V$$

$$= \tfrac{1}{2} m \vec{v}^2 + V - \vec{\Omega} \cdot \vec{r}'' \times m \vec{v} = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}$$

הקשר הזה חשוב במכניקה הסטטיסטית, שכן התפלגות של חלקיקים במערכת מסתובבת ובטמפרטורה נתונה היא אקספוננציאלית באנרגיה בה במערכת אבל אז היא אקספוננציאלית ב $E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}$.

כח הקוריוליס ב (17) משפיע על משוב התנודה של מטוטלת פוקו, על מסלולים בליסטיים, על הספקטרום של מולקולות, על מבנה סערות, וכו'. כך למשל, זרימת האויר באטמוספרה לו כדור הארץ היה במנוחה, היה צריך להיות לאורך גרדינט הלחץ. כח הקוריוליס עקב סיבוב כ"ה הוא ניצב לתנועה



לכן כח הקוריוליס אחראי לערבוליות של סערות.

ב. הקינמטיקה של סיבוב גוף קשיח

כמה דרגות חופש יש לגוף קשיח, אחד שהמרחקים בין כל החלקיקים המרכיבים אותו קבועים? ניקח 3 נקודות בגוף שאינן בקו ישר. מכל $n-3$ הנקודות האחרות לכל אחת ה 3 נק' ויש סה"כ $3(n-3)$ מרחקים קבועים שהם $(n-3)3$ אילוצים. מלבד זה יש 3 אילוצים נוספים מקביעת המרחקים הקבועים בין 3 הנקודות המיוחדות. לכן מספר דרגות החופש הדרוש הוא

$$N = 3n - 3(n-3) - 3 = 6 \tag{18}$$

מאלה 3 הן העתקות ו-3 סיבובים. השאלה המרכזית היא כיצד לתאר 3 הדרגות הסיבוביות. נתאר לעצמינו שאנו בוחרים צירים קרטזיים x', y', z' הקבועים בגוף שבו עם ראשית משותפת עם הצירים x, y, z של המעבדה. ניקח עתה נקודה קבועה במעבדה ב-

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{19}$$

ונשאל מה הם הרכיבים שלה במערכת הגוף:

$$x'(t) = \vec{r}\cdot\hat{i}' = \hat{i}\cdot\hat{i}'x + \hat{j}\cdot\hat{i}'y + \hat{k}\cdot\hat{i}'z$$

(20) $$y'(t) = \vec{r}\cdot\hat{j}' = \hat{i}\cdot\hat{j}'x + \hat{j}\cdot\hat{j}'y + \hat{k}\cdot\hat{j}'z$$

$$z'(t) = \vec{r}\cdot\hat{k}' = \hat{i}\cdot\hat{k}'x + \hat{j}\cdot\hat{k}'y + \hat{k}\cdot\hat{k}'z$$

יש כאן מטריצה 3x3 של מקדמים שמתארים הסיבוב - אבל יש כאן יותר מדי מספרים! זה משום שלא לקחנו בחשבון אילוצים. תחת סיבוב האורך של וקטור מהראשית לנקודה אינו משתנה.

23

(21) $$|\vec{r}\,'|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

אפשר לכתוב זה יותר אלגנטית באמצעות ההגדרה

(22) $$\mathbb{X}'(t) = \mathbb{Q}(t)\,\mathbb{X} \qquad \mathbb{X} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

אם נגדיר מוחלף

(23) $$\tilde{\mathbb{X}} = (x, y, z)$$

ברור ש (21) אומר

(24) $$|\vec{r}|^2 = \tilde{\mathbb{X}}'\mathbb{X}' = \tilde{\mathbb{X}}\mathbb{X}$$

לפי חוקי המוחלפים מ (22) נובע ש-

(25) $$\tilde{\mathbb{X}}' = \tilde{\mathbb{X}}\,\tilde{\mathbb{Q}}(t)$$

ולכן לפי (21)

(26) $$\tilde{\mathbb{X}}\,\tilde{\mathbb{Q}}(t)\,\mathbb{Q}(t)\,\mathbb{X} = \tilde{\mathbb{X}}\mathbb{X}$$

לכן יש דרישה ש

(27) $$\tilde{\mathbb{Q}}(t)\,\mathbb{Q}(t) = \mathbb{1}$$

זה מזהה $\tilde{\mathbb{Q}}(t)$ עם $\mathbb{Q}^{-1}(t)$. מטריצה כזו הוא "אורתוגונלית". התאור של סיבוב יכול להנתן ע"י מטריצה אורתוגונלית תלויה בזמן.

קונסיסטנטיות דורשת שמטריצות האורתוגונליות תהיו חבורה, כלומר, שמכפלת $\mathbb{Q}_2\mathbb{Q}_1$ תהיה אורתוגונלית. האמנם?

$$\widetilde{Q_2 Q_1} = \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 = Q_1^{-1} Q_2^{-1} = (Q_2 Q_1)^{-1} \qquad (28)$$

וזה נכון, בנוסף לכל סבוב יש הפוך, וישנה מטריצת יחידה. לכן מטריצות הסבוב מהוות חבורה - $O(3)$.

מעצם הקיום של האילוץ (27) ברור שמספר הדרגות החופש של מטריצה אורתוגונלית פחות מ 9 (מס' הרכיבים).

ג. משפט אוילר על מטריצה אורתוגונלית

יש לציין ראשית כל שלכל סבוב המטריצה Q אינה יחידה שכן תתכנה בחירות שונות של הצירים $x'y'z'$.

ואז נשאלת השאלה, כאשר נתונה מטריצה אורתוגונלית Q כיצד מסיקים איזה סוג סבוב הוא עושה? משפט אוילר אומר שצריך לחפש את וקטור העצמי של Q עם ערך עצמי 1, שקיים תמיד, ואז הוא מציין ציר הסבוב. בהמשך גם נראה שמעקבת Q ניתן להסיק את זווית הסבוב.

מתימטית משפט אוילר אומר שכל מטריצה אורתוגונלית משאירה וקטור אחד אינווריאנטי; פיסיקאלית זה אומר שכל סבוב הוא סבוב סביב ציר קבוע כלשהו.

כדי להוכיח המשפט נזכר שמגדירים הווקטור העצמי של Q, נקרא לו ψ, שיש לו ערך עצמי λ, לפי

$$Q\psi = \lambda\psi \qquad (29)$$

כרגיל, כדי שאכן יהיה פתרון ψ לא טריוויאלי צריך ש

$$\det(Q - \lambda \mathbb{1}) = 0 \qquad (30)$$

ב 3 ממדים זהו פולינום קובי, ולכן יש שלושה ערכים עצמיים λ (יכולים להיות מנוונים). בנוסף, אין בטחון שהם יהיו ממשיים שכן Q לא סימטרית, אבל כיוון שהמשוואה (30) בעלת מקדמים ממשיים, אם יש λ מרוכב הצמוד שלו גם יהיה פתרון. לכן חייבת להיות לפחות λ אחת ממשית. בהמשך נוכיח ש λ הזו בהכרח היחידה, ושהיא יחידה במובן זה. לכן הווקטור העצמי המתאים הוא המצביע לציר הסבוב.

ניקח מוחלט צמוד של (29)

$$\tilde{\psi}^* Q^{-1} = \lambda^* \tilde{\psi}^* \qquad (31)$$

ולכן

$$\tilde{\psi}^* \psi = \lambda^* \lambda\, \tilde{\psi}^* \psi \qquad (32)$$

מכאן ברור שלכל ערך עצמי $|\lambda|=1$ כך ש λ ממשית בהכרח $\lambda=\pm1$.

כעת נוכיח שיתכן רק ערך עצמי $\lambda=1$ אחד.
נבנה מטריצה 3x3

$$V=(v_1, v_2, v_3) \tag{32}$$

וגם

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix} \tag{33}$$

ברור שקבוצת המשוואות מטפוס (29) מתאחדות ל

$$QV=V\Lambda \tag{34}$$

כעת הווקטורים v_i בלתי תלויים כהגדרה. ולכן הדטרמי-נגטה של V איננה אפס. זה אומר שיש ל V הפוך. על כן מ (34) נובע

$$V^{-1}QV=\Lambda \tag{35}$$

כיוון שאנו רוצים בודק מלכסנים המטריצה Q. נזכור שדטרמיננטה של מטריצה הפוכה שווה להפוך של דטרמיננטה המטריצה המקורית. על כן מ (35)

$$\det V^{-1}\cdot\det Q\cdot\det V=\underbrace{\det\Lambda}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

$$\det Q=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{36}$$

אבל לפי (27) והעובדה שדטרמיננטה של מכפלה שווה לדטרמיננטה של המקוריות נמצא ש $(\det Q)^2=1$ כלומר ולכן $\det Q=\pm1$ או.

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\pm1 \tag{37}$$

יש לפסול המקרה -1 כיוון שמדובר בסיבוב, שכן למטריצה המתארת סיבוב אינפיניטסימלי חייבת להיות לה דטרמיננטה קרובה לזו של מטריצת היחידה. לכן לערכים סימן +1.

אם מופיע זוג של λ מרוכבים, הרי שהשלישי חייב להיות +1. ואם שלושתם ממשיים, נקבל דטרמיננטה +1 רק אם שניים הם -1 והשלישי +1. לכן (משפט אוילר) כל מטריצה אורתוגונלית יש לה וקטור עצמי יחיד שהוא אינווריאנטי. ופיסיקלית, כל סיבוב

שקול לסבוב סביב ציר קבוע - הוא הוקטור האינבריאנטי.

ואיך נודעים באיזה זווית הסבוב? נניח שידוע הכוון, ונניח צירים כך שהוא לאורך z. אז אם נקרא לזווית הסבוב Φ המטריצה בצירים שבחרנו צריכה להיות

(24)

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (38)$$

כי זו מסובבת במישור xy. אנו רואים ש

$$\mathrm{Tr}\, Q_0 = 1 + 2\cos\Phi \qquad (39)$$

מצד שני עקבת מטריצה אינבריאנטית תחת טרנספורמציות סימילריות, כלומר, לכל b,

$$\mathrm{Tr}\, Q = \mathrm{Tr}\, b Q b^{-1} \qquad (40)$$

כאשר הצירים שבחרנו כדי לקבל הצורה המיוחדת (38) קשורים לצירים הסטנדרטיים בדרך מסוימת

$$X'_0 = b X' \qquad X_0 = b X \qquad (41)$$

לכן מ (22)

$$X'_0 = \underbrace{b Q b^{-1}}_{Q_0} X_0 \qquad (42)$$

לאור (40) ולכן שהעקבה של Q המקורית צריכה גם להיות $1+2\cos\Phi$ ולכן קל מאוד לגלות הזווית Φ כולל סדרת את ציר התנועה.

ד. תנועות זוויתיות וקשרן עם מטריצות אורתוגונליות

לפי משפט אוילר סבוב כלשהו, ובפרט סבוב אינפיניטסימלי, שקול לסבוב סביב ציר קבוע. במקרה של סבוב אינפיניטסימלי, הזווית Φ תהיה אינפיניטסימלית, ובעזרתה נוכל להגדיר תנועות זוויתיות.

כל מטריצה אורתוגונלית הקרובה ליחידה $\mathbb{1}$ ניתן לכתוב בצורה

$$Q = \mathbb{1} + \varepsilon \qquad (43)$$

כאשר כל רכיב ב-ε אינפיניטסימלי ו-

$$\tilde{\varepsilon} = -\varepsilon \qquad (44)$$

לצה מעמק ש

$$(45) \qquad (\mathbb{1} - \mathcal{E})(\mathbb{1} + \mathcal{E}) = \mathbb{1} + O(\mathcal{E}^2)$$

כדוגמה נפיק מ (38) ש

$$(46) \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi & 0 \\ -\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהוא אכן אנטיסימטרית. אכן כל סיבוב אינפיניטסימלי מתואר ע"י מטריצה 3x3 אנטיסימטרית.

נכתוב באופן כללי

$$(47) \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}$$

נתבונן על וקטור $\vec{\xi}$ הקבוע בתוך הגוף β כך שרכיביו $\vec{\xi}'$ קבועים אבל $\vec{\xi} = \vec{\xi}(t)$. בלשון של מטריצות

$$(48) \qquad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(49) \qquad \Xi(t) = \tilde{Q}(t)\,\Xi' = \Xi' - \mathcal{E}\,\Xi'$$

הדיפרנציאל $d\Xi(t) \equiv \Xi(t) - \Xi' = -\mathcal{E}\,\Xi'$ הוא מידה של סיבוב הגוף. אם נזניח איברים מסדר שני

$$(50) \qquad d\Xi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \Xi(t)$$

בשימוש ההגדרה

$$(51) \qquad d\vec{\Phi} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

כלומר זה

$$(52) \qquad d\vec{\xi}(t) = d\vec{\Phi} \times \vec{\xi}(t)$$

חלוקה ב dt נותנת

$$(53) \qquad \frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\xi} \qquad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Phi}}{dt}$$

זה מתיישב עם משוואה (ד) ומראה ש $\vec{\Omega}$ היא התדירות הזוויתית המקובלת.

ה. מומנטי ההתמדה והלגרנג'יאן

ניגש עתה לכתוב הלגרנג'יאן לסיבוב גוף קשיח. אם $\vec{r}_i$ מסמן חלקיק מסוים ו- $\dot{\vec{R}}$ מהירות מרכז המסה הרי

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times\vec{r}_i \tag{54}$$

ולכן

$$K=\sum_i \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \dot{\vec{R}}\cdot\vec{\Omega}\times\sum_i m_i \vec{r}_i + \tfrac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\Omega}\times\vec{r}_i)^2 \tag{55}$$

כאן כמובן $M=\sum m_i$. הסכום $\sum m_i \vec{r}_i$ מתאפס בתנאי שבחרנו הראשית במרכז המסה. חוץ מזה

25

$$(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i)\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i) = \vec{\Omega}\cdot\vec{r}_i\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i) \tag{56}$$
$$= \vec{\Omega}\cdot[\vec{\Omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i\, \vec{\Omega}\cdot\vec{r}_i]$$
$$= \vec{\Omega}^2 \vec{r}_i^{\,2} - (\vec{\Omega}\cdot\vec{r}_i)^2$$

ויש לנו פה בטוי קוודרטי ברכיבי $\vec{\Omega}$ ואפשר תמיד לכתוב אותו כזה בעזרת מטריצה. נגדיר

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{pmatrix} \tag{57}$$

ונכתוב מטריצה $\mathbb{I}$ כזו ש

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbb{I}\,\boldsymbol{\Omega} = \sum_i m_i [\vec{\Omega}^2 \vec{r}_i^{\,2} - (\vec{\Omega}\cdot\vec{r}_i)^2] \tag{58}$$

קצת נסיון מראה ש

$$\mathbb{I} = \sum m_i \begin{pmatrix} y_i^2+z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2+z_i^2 & -z_i y_i \\ -x_i z_i & -z_i y_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix} \tag{59}$$

ואז, אם נזמין אנרגיה פוטנציאלית, נוכל לכתוב

$$L = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\,\mathbb{I}\,\boldsymbol{\Omega} - V \tag{60}$$

כעת כיוון ש $(\vec{\Omega}\times\vec{r}_i)^2$ חיובי, כל הבטוי (58)

חייב להיות חיובי. זה אומר ש II היא מטריצה חיובית. ברור גם מההגדרה (59) ש II סימטרית. כמו ב- V.G. נמצא עתה את חולבוות הערכים העצמיים של II. המשוואה המגדירה אותם היא

$$\mathbb{I}\, v_k = I_k\, v_k \qquad k = 1, 2, 3 \tag{61}$$

והתנאי

$$\det\left(\mathbb{I} - I\,\mathbb{1}\right) = 0 \tag{62}$$

קובע שלושת הערכים של I. ניקח הראשון למשל. מקבלים

$$\tilde{v}_1^{*}\, \mathbb{I}\, v_1 = I_1\, \tilde{v}_1^{*} v_1 \tag{63}$$

ואם את המשוואה (61) נצמוד וגם ניקח מוחלף (זכור ש II ממשית וסימטרית) נקבל

$$\tilde{v}_1^{*}\, \mathbb{I}\, v_1 = I_1^{*}\, \tilde{v}_1^{*} v_1 \tag{64}$$

השוואה של (63) ו- (64) מראה ש I_1 ממשי. כיוון שאין סיבה ש v_1 יהיה קומפלקסי. לכן אגף שמאל של (63) בהכרח חיובי (II מטריצה חיובית). וכיוון ש

$$\tilde{v}_1 v_1 = v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 > 0$$

ברור ש $0 < I_1$. באותה מידה $0 < I_2$ ו- $0 < I_3$. שלושת הערכים העצמיים נקראים מומנטי ההתמדה של הגוף.

כעת נראה איך בוחרים קואורדינטות מתאימות לצירת הגוף המסתובב II - מטריצת ההתמדה - וניצבות אלה כסלונית. עם ה v_k שמצאנו קודם - ושדאגנו לנרמל, נבנה עתה, בדומה ל (37)

$$\mathbb{V} = \left(v_1, v_2, v_3\right) \tag{65}$$

כעת, אם ניקח (61) עבור k=1 ונכפול משמאל ב $\tilde{v}_2$ ולאחר מכן נעשה אותה פעולה עם $1 \leftrightarrow 2$

$$\tilde{v}_2\, \mathbb{I}\, v_1 = I_1\, \tilde{v}_2 v_1$$
$$\tilde{v}_2\, \mathbb{I}\, v_1 = I_2\, \tilde{v}_2 v_1 \tag{66}$$

רואים שקונסיסטנטיות מתקבלת רק אם (מניחים $I_1 \neq I_2$)

$$\tilde{v}_2 v_1 = 0 \tag{67}$$

בדומה מוכח $\tilde{v}\, v_3 v_2 = \tilde{v}_3 v_1 = 0$. אחרי לנרמול ה v_k אנו מקבלים ש

$$\tilde{\mathbb{V}}\,\mathbb{V} = \mathbb{1} \tag{68}$$

כלומר $\mathbb{V}$ הינה אורתוגונלית. אם יש כפולות של ה I_1 למשל, יתכן מצב לנגזרות שנמצאו שני v בתוך תחום עבורו. ההוכחה של אורתוגונליות המבוססת על (66) נכשלת, אבל בתהליך של אורתוגונליזציה של שמידט לגרהם אפשר לבנות מתוך ה v שתי קומבינציות לינאריות שהן אורתוגונליות. לכן עם הבחירה הנכונה (68) תמיד תקף.

המטריצה $\mathbb{V}$ מלכסנת את $\mathbb{I}$, שכן בדומה ל (34) אפשר לכתוב כאן

$$\mathbb{I}\,\mathbb{V} = \mathbb{V}\Lambda \; ; \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix} \tag{69}$$

לכן

$$\tilde{\mathbb{V}}\,\mathbb{I}\,\mathbb{V} = \mathbb{V}^{-1}\,\mathbb{I}\,\mathbb{V} = \Lambda \tag{70}$$

מבחינה מעשית זה שימושי אם נכתוב (69) כך

$$\mathbb{I} = \mathbb{V}\Lambda\tilde{\mathbb{V}} \tag{71}$$

כך אז הלגרנג'יאן לוקח הצורה

$$L = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\mathbb{W}}\Lambda\mathbb{W} - V \tag{72}$$

כאן

$$\mathbb{W} = \tilde{\mathbb{V}}\,\Omega \tag{73}$$

ה $\mathbb{V}$ פה כיוון שהוא אורתוגונלי משמשת כמטריצת סיבוב: הוא מסובבת הצירים מהצירים ההתחלתיים לצירים כאלה שלגביהם $\mathbb{I}$ הוא אלכסוני. אלה האחרונים נקראים "צירים עיקריים". בסוף נכתוב L בצורה המפורשת

$$L = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\left(I_1 W_1^2 + I_2 W_2^2 + I_3 W_3^2\right) - V \tag{74}$$

כל W_k מתאים ל $\mathbb{W}$ והוא הוקטור ה Ω או $\vec{\Omega}$ עפ"י הצירים העיקריים.

כעת נמיין גופים לפי צורת Λ. ברור שגוף שהוא כדורי סימטרי והנה לו

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad (\text{כדור}) \tag{75}$$

התוצאה הזו נכונה גם כן לקליפה הומוגנית, ובכלל לגוף בעל
סימטריה קובית. ההבדל הוא שבמקרה הכדורי הצירים
העיקריים הם כל שלושה צירים ניצבים. במקרה הזה
גוף כזה נקרא סביבון כדורי.

אם לגוף יש רק ציר סימטריה אחד, ברור
שאפשר לקחת ציר העיקרי השלישי בציר הסימטריה
כאשר שני האחרים יהיו כל שני צירים ניצבים
לו. במקרה הזה

$$I_1 = I_2 \neq I_3 \tag{76}$$

גוף כזה נקרא סביבון סימטרי. מקרה מיוחד של זה הוא
גוף דמוי מקל זה [illegible]. כיוון המסה נמצאת
תמיד עם הקואורדינטות $x=y=0$ ונקבל מ-(59) ש

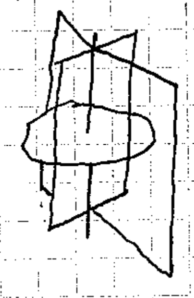
$$I_1 = I_2 \qquad I_3 = 0 \tag{77}$$

מולקולה כמו CO_2 היא כזאת על המרחקים האטומיים.

גוף שכולו במישור, אפשר לקחת ציר השלישי בציר הניצב
למישור. אז לכל המסה $z=0$ ולפי (59)

$$\mathbb{I} = \int d^3x \; \rho \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} \tag{78}$$

אם כמו כן, ציר השלישי הוא ציר סימטריה סבובית, האיברים השני-אלכסוניים
מתאפסים. זה גם קורה כאשר יש שני מישורי סימטריה ניצבים
זה לזה ולאיברים קבועה. אז נבין ש



$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{79}$$

גוף בלי סימטריה כלשהי נקרא סביבון אסימטרי.
בכל זאת יש לו צירים עיקריים. אם כי לא נדע
איפה הם בלי חישוב, אפשר להסתכל על הצורה של
$\mathbb{I}$ במערכת כזו. אז לא קיימים האיברים הלא-אלכסוניים, ולכן
ש

$$I_1 + I_2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + 2z_i^2\right) \tag{80}$$

$$I_3 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

ברור ש

$$I_3 < I_1 + I_2 \tag{81}$$

זאת אומרת, תמיד סכום שני מומנטי התמדה גובר על השלישי.

1. דינמיקת גוף קשיח

נתבונן ב (60) ונתייחס אל $\vec{R}$ ואל הזווית $\vec{\Phi}$ שממנה נגזרת $\vec{\Omega}$ (ראה (53)) כאל קואורדינטות מוכללות. אז משוואה אחת היא

(82) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\ddot{\vec{R}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}}$$

אגף ימין ניתן לכתוב כך

(83) $$\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}\underbrace{\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \vec{R}}}_{1} = -\sum_i \vec{f}_i = \vec{F}$$

על כן התנועה כרגילה

(84) $$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$$

המשוואה הזוויתית היא

(85) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\Phi}}$$

נשכתב אגף שמאל כך

(86) $$\frac{\partial L}{\partial \Omega_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \Omega_j}(\tilde{\Omega}\,\mathbb{I}\,\Omega) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \Omega_j}\sum_{jk} \mathbb{I}_{jk}\Omega_j\Omega_k$$
$$= \sum_k \mathbb{I}_{jk}\Omega_k = (\mathbb{I}\,\Omega)_j$$

רק V תלוי ב $\vec{\Phi}$ דרך תלותו בקואורדינטות. אכן אם $\delta\vec{\Phi}$ מתאר סיבוב קטן של הגוף (השווה (I.24))

(87) $$\delta V = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i = -\sum_i \vec{f}_i\cdot\delta\vec{\Phi}\times\vec{r}_i$$
$$= -\delta\vec{\Phi}\cdot\sum_i \vec{r}_i\times\vec{f}_i = -\delta\vec{\Phi}\cdot\vec{\tau}$$

כאן $\vec{\tau}$ מסמל המומנט הכולל על הגוף

(88) $$\frac{\partial V}{\partial \vec{\Phi}} = -\vec{\tau}$$

ולכן משוואות התנועה הן

(89) $$\frac{d}{dt}(\mathbb{I}\,\Omega) = \mathbb{T} \qquad \mathbb{T}\leftrightarrow\vec{\tau}$$

ג. <u>סבוב חפשי</u>

כאשר המומנט $\vec{T}$ מתאפס אומרים שהגוף נמצא בסבוב חפשי. לפי (89) אז

$$\mathbb{L} \equiv \mathbb{I}\,\boldsymbol{\Omega} = \text{const} \qquad (90)$$

השמורה הזו הוא התנע זוויתי, כי אין אחרת. לשאלות נסתכל על הסביבון הכדורי שעבורו

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & I \end{pmatrix} \qquad (91)$$

ובגלל שהוא מכפלה של היחידה

$$\vec{L} = I\,\vec{\Omega} \qquad (92)$$

שמתאים לקשר האלמנטרי של תנע זוויתי עם תדירות סבובית.
במקרים שאין בהם כל כך הרבה סימטריה נכתוב $\mathbb{I}$ לפי (77) ונשתמש ב (73)

$$\mathbb{L} = \mathbb{I}\,\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{V}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbb{V}}\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbb{W} \qquad (93)$$

מכאן אנו מגדירים ש

$$\boldsymbol{\ell} \equiv \tilde{\mathbb{V}}\mathbb{L} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbb{W} \qquad (94)$$

במערכת ל (73) אפשר לזהות $\boldsymbol{\ell}$ כרכיבי תנע הזוויתי לפי הצירים העיקריים. יש לנו

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \qquad L_j = I_j W_j \qquad j = 1,2,3 \qquad (95)$$

למשל נקח את המקרה

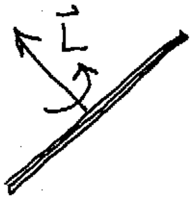
$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} I & & 0 \\ & I & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad (96)$$

ואז ברור ש

$$\boldsymbol{\ell} = I \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (97)$$

מהצבות הראשונה ב (94) ברור ש $\mathbb{L}$ הוא אורתוגונלי לשורה

השלישית של $\tilde{\mathbb{V}}$ שהוא הטור השלישי של $\mathbb{V}$ שהוא הוקטור העצמי השלישי $\vec{\omega}_3$. ה-$\vec{\omega}_3$ במקרה שלנו לאורך ציר המקל. לכן אנו לומדים שהמקל מסתובב תמיד במישור הניצב ל $\vec{L}$



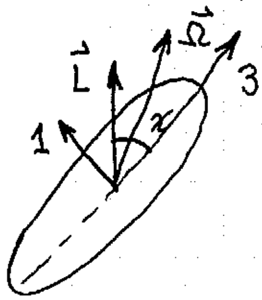
ומכאן של-$\vec{\Omega}$ יש רכיב לאורך ציר הסימטריה (לאורך $\vec{\omega}_3$) אבל ברור מ (97) שבמישור הניצב לאותו ציר $\vec{\Omega}$ ו-$\vec{L}$ הם באותו כיוון.

נפנה עתה לסביבון הסימטרי, צ"ל

(98)
$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_1 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

הסימטריה נותנת לנו חופש בבחירת הצירים 1 ו-2. נבחר ציר 1 כך שהוא במישור $\vec{L}$-3 כמו בתמונה

(99)



אין בטחון שהצירים 1 ו-2 לא מסתובבים ביחס לגוף אבל אפשרות זו לא פוגמת בשיקולים. כיוון שלפי (94)

(100)
$$\mathbb{l} = \begin{pmatrix} I_1 W_1 \\ I_1 W_2 \\ I_3 W_3 \end{pmatrix}$$

אבל לפי בחירתנו אין רכיב 2 של $\vec{l}$, אנו למדים ש $W_2=0$ כלומר

(101)
$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ 0 \\ W_3 \end{pmatrix}$$

ולכן $\vec{\Omega}$ נמצא באותו מישור $\vec{L}$-3 כמו ב (99).

לאור כל זה נרשום

(102)
$$\vec{\Omega} = \Omega_{pr} \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|} + \omega \hat{x}_3$$

$\hat{x}_3$ הוא וקטור יחידה לאורך ציר 3. ברור ש $\vec{\Omega} \times \hat{x}_3$ ניצב לציר 3 ו-$\vec{L}$ כלומר שציר 3 נע בניצב ל $\vec{L}$ תמיד ומבצע נקיפה עם זווית x

קבועה בין $\hat{x}_3$ ל $\vec{L}$ הקבוע במרחב.
כדי לקבל ערכה של Ω_{pr} נכפול משוואות (102) סקלרית ב $\hat{x}_1$ שהוא ניצב ל $\hat{x}_3$

(103) $$\vec{\Omega}\cdot\hat{x}_1 \equiv w_1 = \Omega_{pr}\frac{L_1}{|\vec{L}|} = \Omega_{pr}\frac{I_1 w_1}{|\vec{L}|}$$

ולכן

(104) $$\Omega_{pr} = \frac{|\vec{L}|}{I_1}$$

אם הגוף קרוב ל"מקל" I_1 גדול במיוחד ולכן Ω_{pr} קטנה במיוחד. ברור ש Ω_{pr} קבועה.
חוץ מהנקיפה העצם גם מסתובב סביב ציר $\hat{x}_3$ במהירות (גם קבועה)

(105) $$\Omega_{spin} = w_3 = \frac{\vec{L}\cdot\hat{x}_3}{I_3} = \frac{|\vec{L}|\cos\chi}{I_3}$$

הספין הזה מהיר במיוחד בגבול של עצם דמוי מקלון ($I_3 \to 0$) וקטן במיוחד באשר $\chi \to \frac{\pi}{2}$.

(27) →

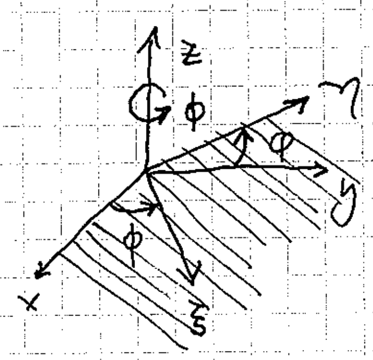
ח. זוויות Euler

ברגע שאין סימטריה לעצם או שיש מומנטים חיצוניים, השיטות של הסעיף הקודם לא יעילות. במקום זאת צריך לנצל את קבועות המומנטים I_1, I_2, I_3 ע"י כתיבת משוואות התנועה הישר במערכת הצירים העיקריים. זה נעשה בעזרת זוויות שאוילר הכניס כתחליף ל $\vec{\Phi}$.

מתמקדים בצירים העיקריים שנקבעו לגוף, במצבם ההתחלתי x, y, z. כדי להגיע למצב הסופי ξ, η, ζ יש לבצע שלושה סיבובים

שלב א'

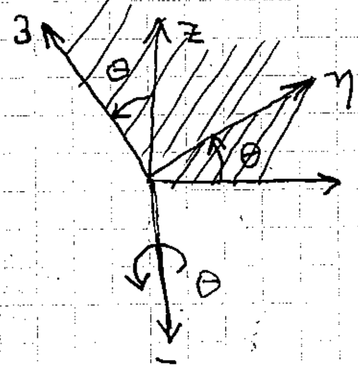
(106)



זה משאיר ציר z ללא שינוי.

שלב ב'

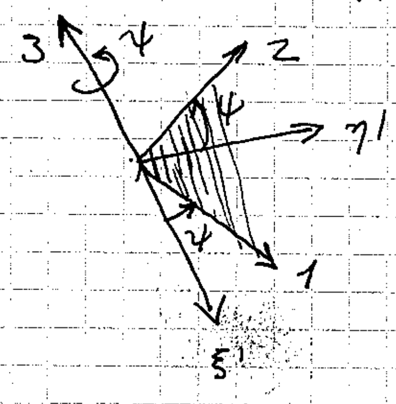
(107)



זה משאיר ציר ξ ללא שינוי.

שלב ג'

בו משאיר ζ' במקומו ומסובב סביבו בזווית ψ

(108) 

כל אחד מהסיבובים האלמנטריים מתבצע סביב ציר קבוע, ולכן ניתן לתאר אותו במטריצת סיבוב פשוטה. השלב הראשון נותן

$$(109)\qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

השלב השני משתמש בציר X החדש, ולכן צורת המטריצה היא המתאימה לסיבוב סביב ציר ראשון

$$(110)\qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

השלב השלישי משתמש בציר השלישי החדש, ולכן יש לו צורה מקבילה לזו של $\mathbb{A}$ עם הזווית ψ

$$(111)\qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כל אחת ממטריצות אלה היא אורתוגונלית. הסיבוב הכולל

$$(112)\qquad \mathbb{D} = \mathbb{C}\mathbb{B}\mathbb{A}$$

הוא, לכן, גם אורתוגונלי.

כיצד נראים הרכיבים של $\mathbb{W}$ המתאימים לסיבוב כזה?

סיבוב $\dot\psi\, dt$ תורם רק ל-w_3. הסיבוב $\dot\phi\, dt$ תורם

התרומה של $\dot\phi \cos\theta\, dt$ ל w_3 והתרומה $\dot\phi \sin\theta\, dt$ במישור 1-2.
מוצאת האחרונה $\dot\phi \sin\theta \cos\psi\, dt$ היא סביב ציר 2
כאשר $\dot\phi \sin\theta \sin\psi\, dt$ היא סביב ציר 1. $\dot\theta\, dt$ אינה
תורמת כלום ל w_3 - היא כולה במישור 1-2. יש
התרומה ל $\dot\theta \cos\psi\, dt$ ל w_1 כאשר ה $-\dot\theta \sin\psi\, dt$
תורם ל w_2 בסה"כ.

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi \\
w_2 &= \dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi \qquad (113)\\
w_3 &= \dot\psi + \dot\phi \cos\theta
\end{aligned}
$$

הבדיקה נעשית ע"י אפס 2 משוואות הזוויות.

הצבה בלגרנז'יין (74) נותנת

$$
\begin{aligned}
(114) \quad L = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec R}^2 &+ \tfrac{1}{2} I_1 (\dot\phi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi)^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} I_2 (\dot\phi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi)^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} I_3 (\dot\psi + \dot\phi \cos\theta)^2 - V
\end{aligned}
$$

באפליקציה נסתכל על השמורות של הסביבון הסימטרי המקורי (76). נקבל

$$
\begin{aligned}
(115) \quad L = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec R}^2 &+ \tfrac{1}{2} (I_1 \sin^2\theta + I_3 \cos^2\theta)\, \dot\phi^2 \\
&+ \tfrac{1}{2} I_1 \dot\theta_1^2 + \tfrac{1}{2} I_3 \dot\psi^2 + I_3 \dot\psi \dot\phi \cos\theta - V
\end{aligned}
$$

בסביבון הסימטרי אין V ולגרנז'יין לא תלוי ב ψ או ϕ;
אלא רק כן קואורדינטות ציקליות ולכן בוודאי ש

$$(116) \quad \frac{d}{dt} p_\psi = \frac{d}{dt} p_\phi = 0$$

בפרט ש

$$(117) \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3 (\dot\psi + \dot\phi \cos\theta) = I_3 w_3 = L_3$$

מכאן (בעזרת (113)) מצאנו ש L_3 שמורה, וכמובן w_3 שמורה.
לא רק שזה מאפשר את שמירת תדירות הספין w_3 (כמו (105))
אלא גם את שמירת הזווית $\measuredangle$ בין $\vec L$ לציר 3. זאת אומרת
יש כאן נקיפה מדויקת.

$$(118) \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_3 (\dot\psi + \dot\phi \cos\theta) \cos\theta + I_1 \sin^2\theta\, \dot\phi$$

אם נבחר ציר z המקורי (במעבדה) לאורך $\vec{L}$ (השמור), אז יש לזהות

$$p_\phi \leftrightarrow |\vec{L}| \tag{119}$$

כפי ראינו (III.ג) שתנע קנוני לזווית הזו תנע זוויתי סביב הציר המתאים. במשוואה (118) מנחוק שהסימן של p_ϕ חיובי. ברור לנו אז שבבחירה שלנו $\theta = \chi$. הצבה של זה ב-(117) ביחד עם האחרונה מ-(113) נותנת

$$
\begin{aligned}
|\vec{L}| &= I_3 W_3 \cos\chi + I_1 \sin^2\chi\, \dot{\phi} \\
&= L_3 \cos\chi + I_1 \sin^2\chi\, \dot{\phi} \\
&= |\vec{L}| \cos^2\chi + I_1 \sin^2\chi\, \dot{\phi}
\end{aligned}
\tag{120}
$$

ולכן

$$\dot{\phi} = \frac{|\vec{L}|}{I_1} = \text{const} \tag{121}$$

את הזהות ש-$\dot{\phi}$ זהה עם Ω_{pr} לפי (104) ויש לנו עוד הוכחה של שמור תדירות הנקיפה.

כעת מ-(117) נחלץ $\dot{\psi}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \frac{L_3}{I_3} - \dot{\phi}\cos\chi = \frac{|\vec{L}|\cos\chi}{I_3} - \frac{|\vec{L}|}{I_1}\cos\chi \\
&= \frac{|\vec{L}|}{I_3}\cos\chi\left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)\Omega_{spin}
\end{aligned}
\tag{122}
$$

באחרונה השתמשנו ב-(105). יש לשים לב שהסימן היחסי של $\dot{\psi}$ ו-Ω_{spin} יכול להיות + או −. מהלכו הפיזיקלי של $\dot{\psi}$ נובע בה משקל. אבל אם ניקח את רכיב משוואה (102) לאורך $\hat{x}_3$ כלומר

$$W_3 = \Omega_{pr}\frac{L_3}{|\vec{L}|} + \omega \tag{123}$$

אבל $\Omega_{spin} = W_3$ ולפי (104)-(105)

$$\Omega_{pr} = \frac{\Omega_{spin}}{\cos\chi}\frac{I_3}{I_1} = \Omega_{spin}\frac{I_3}{I_1}\frac{|\vec{L}|}{L_3} \tag{124}$$

28 →

ולכן $\omega = \dot{\psi}$.

ט. משוואות אוילר

קבועות מומנטי ההתמדה העיקריות (שלא כמו רכיבי המטריצה II כולם) אומרת שמה נוחה לכתוב את משוואות התנועה לא בצורה (89) אלא כמשוואות לגרנג' עבור הקואורדינטות המוכללות $\{\phi, \theta, \psi\}$.

92

נתחיל עם הביטוי (117) ונציב ב

$$\frac{d}{dt} p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \psi} \qquad (125)$$

לפי (114)

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = I_1 w_1 (\underbrace{\dot\phi \sin\theta\cos\psi - \dot\theta \sin\psi}_{w_2}) + I_2 w_2 (\underbrace{-\dot\phi \sin\theta \sin\psi - \dot\theta\cos\psi}_{-w_1}) - \frac{\partial V}{\partial \psi} \qquad (126)$$

אבל עפ"י (87) אפשר לזהות $-\frac{\partial V}{\partial \psi}$ עם הרכיב τ_3 של המומנט
לכן יש לנו

$$I_3 \dot w_3 + (I_2 - I_1) w_1 w_2 = \tau_3 \qquad (127)$$

כאן θ, ϕ מתארות סיבוב לא סביב ציר 1 ולא סביב ציר 2. את ψ יכולנו לזהות עם סיבוב סביב ציר 3 בתנאי שהגדרנו מתחילים עם z לאורך ציר 3. לכן אי אפשר לקבל המשוואות האחרות להגדרה כמשוואות לגרנג'. אבל כיוון שבחירת הצירים כ 1,2,3 הינה שרירותית, נוכל לקבל המשוואות המתאימות ע"י "סיבוב" האינדקסים 1,2,3:

$$(128) \qquad \begin{aligned} I_1 \dot w_1 + (I_3 - I_2) w_2 w_3 &= \tau_1 \\ I_2 \dot w_2 + (I_1 - I_3) w_3 w_1 &= \tau_2 \end{aligned}$$

אלה משוואות אוילר, גם כאשר $\vec\tau$ לא נגזר מפוטנציאל.

אם הסביבה חפשי, $\vec\tau = 0$, ונכפיל כל משוואה ב w_j המתאים,
נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\frac12 I_1 w_1^2 + \frac12 I_2 w_2^2 + \frac12 I_3 w_3^2\right) = 0 \qquad (129)$$

שזהו שמור אנרגיה הקינטית של טבלה. שוב אם $\vec\tau=0$ ונכפיל כל אחת ב $I_j w_j$ המתאים, ונקבל ש

$$I_3 (I_2 - I_1) + I_1 (I_3 - I_2) + I_2 (I_1 - I_3) = 0 \qquad (130)$$

נראה ש

$$\frac{d}{dt}\left(I_1^2 w_1^2 + I_2^2 w_2^2 + I_3^2 w_3^2\right) = 0 \qquad (131)$$

כלומר שמור $|\vec L|^2$.

כל זה לגוף כללי. אם הגוף הוא סביבון סימטרי $I_1=I_2$
ויש לנו מ-(127) ש

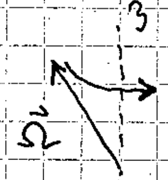
(132) $$W_3 = \dot\psi + \dot\phi\cos\theta = const = \Omega_{spin}$$

שמשוואות התנועה (116)-(117). אם במקום W_3 נכתוב Ω_{spin}
נקבל מ-(128)

(133)
$$\dot W_1 + \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\Omega_{spin} W_2 = 0$$
$$\dot W_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_1}\Omega_{spin} W_1 = 0$$

הפתרון הוא (אם נבחר ראשית הזמן בצורה מתאימה)

(134)
$$W_1 = A\cos\tilde\omega t$$
$$W_2 = A\sin\tilde\omega t$$
$$\tilde\omega = -\left(1-\frac{I_3}{I_1}\right)\Omega_{spin}$$



אנו רואים מ-(127) ש $\tilde\omega$ זו זהה ל ω מ-(102), מלבד
הסימן. כלומר

(135) $$\tilde\omega = -\dot\psi = -\omega$$

זאת אומרת, ה-$\vec\Omega$ עושה פרצסיה סביב ציר 3 של הגוף
בתדירות $\dot\psi$ — אין להתבלבל בין פרצסיה זו
במערכת הגוף לפרצסיות ציר 3 סביב $\vec L$ במערכת
המעבדה, שמתבצעת בתדירות $\dot\phi$.

הדוגמה הקלאסית של נקיפה חפשית נותנת ע"י כ"ה.
כאן $\frac{1}{300} \approx 1-\frac{I_3}{I_1}$ ולכן אין כל כך הבדל בכוון $\vec L$ ו-$\vec\Omega$
כי $\dot\phi$ במעט מכפלה של Ω. התדירות $\tilde\omega$ תהיה כ
$\Omega_{spin}/300$. כלומר בכ"ה רואים את $\vec\Omega$ (מסומן, למשל, ע"י
סביב הכדור הצפוני) עושה נקיפה סביב ציר
כדור הארץ פעם ב-300 יום. זה הנבוי. הצפה
למעשה המחזור של הנקיפה החפשית יותר ארוך
בגלל השפעת האטמוספרה, כ 427 יום. המרחק בין $\vec\Omega$ והציר
כ 4.5 מטר על פני כ"ה.

1. הסביבון האסימטרי החפשי

כעת נתבונן סבוב חפשי של גוף עם

(136) $$I_3 > I_2 > I_1$$

נכתוב המשוואות ב (129) ו- (131) במונחים של רכיבי $\vec L$!

הפתרון הוא

$$\frac{L_1^2}{2EI_1} + \frac{L_2^2}{2EI_2} + \frac{L_3^2}{2EI_3} = 1 \qquad (137)$$

זאת הנו המשוואה של אליפסואיד בעל חצי צירים $\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_2}$ ו- $\sqrt{2EI_3}$ במרחב של רכיבי $\vec{L}$. והשניה הוא

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = |\vec{L}|^2 = \text{const} \qquad (138)$$

שהוא המשוואה של כדור בו במרחב, בעל רדיוס $|\vec{L}|$

29 → אם נכפיל (137) ב $2EI_1$ נראה מיד ש

$$|\vec{L}|^2 \geq 2EI_1 \qquad (139)$$

וכן בעזרת (136). באותה מידה, אם נכפיל (137) ב $2EI_3$ מתברר ש

$$2EI_3 \geq |\vec{L}|^2 \qquad (140)$$

משמע אלה הכדור שרדיוס הכדור בין חצי ציר הגדול ביותר לבין חצי ציר הקטן ביותר של האליפסואיד. מזה נובע שחייב יש חתך בין שני המשטחים. עקומות החתך מציינים תנועות הסיבוב כפי שהוא נראות במרחב הצירים העקרוניים. כל נקודה בעקומה כזו מציינת כיוון $\vec{L}$ ביחס לצירים, כלומר אוריינטציה מסוימת של הגוף.

כאשר $|\vec{L}|^2 \gtrsim 2EI_1$ החתך הם שני דמוי עיגולים קטנים לאורך ציר 1. התנועה הוא, אם כן, כזו שווקטור $\vec{L}$ סובב סביב ציר 1 במרחק קטן. במעבדה רואים הסיבוב כאותו סביב ציר 1 בקירוב. האפשרות של עיגול קטן פרושה שסיבוב סביב הציר עם מומנט הקטן ביותר הוא סיבוב יציב.

כאשר $|\vec{L}|^2 \lesssim 2EI_3$ שוב החתך הוא שני עיגולים מסביב לציר 3. במעבדה רואים הסיבוב כסביב ציר 3, והתנועה סביב הציר עם המומנט הכי גדול הוא יציבה.

שונה התמונה עבור $|\vec{L}|^2 \simeq 2EI_2$. אז החתך הוא שתי אליפסות גדולות - הן נוגעות כאשר $|\vec{L}|^2 = 2EI_2$ ועושים צלב בנקודות על ציר 2. כיוון שהחתך הוא ארוך, אין תנועה מצומצמת לקרבת ציר 2, כלומר אין אפשרות לסובב אליפסואיד סביב הציר שהמומנט שלו הוא בינוני. הסיבוב הזה בלתי יציב.

ולעצם הדינמיקה יש כמה מקרים. אם $\vec{L}^2 = 2EI_1$ ברור מ' (137) ש $L_2 = L_3 = 0$ ולכן יש בסך הכל סיבוב סביב ציר 1 עם תדירות

$$|\vec{\Omega}| = W_1 = \frac{L_1}{I_1} = \sqrt{\frac{2E}{I_1}} \qquad (141)$$

אם $\vec{L}^2 = 2EI_3$ ברור ש $L_1 = L_2 = 0$ ולכן יש סיבוב

רק סביב ציר 3 עם תדירות

$$|\vec{\Omega}| = \frac{|\vec{L}|}{I_3} = \sqrt{\frac{2E}{I_3}} \tag{142}$$

במקרה הכללי פותרים את המשוואות

$$\tfrac{1}{2} I_1 W_1^2 + \tfrac{1}{2} I_2 W_2^2 + \tfrac{1}{2} I_3 W_3^2 = E \tag{143}$$

$$I_1^2 W_1^2 + I_2^2 W_2^2 + I_3^2 W_3^2 = |\vec{L}|^2$$

עבור W_1 ו- W_3 ומציבים במשוואת אוילר האמצעית (השניה ב (128)). אז

$$\frac{dW_2}{dt} = \pm \frac{1}{I_2\sqrt{I_1 I_3}} \left[2EI_3 - |\vec{L}|^2 - I_2(I_3 - I_2) W_2^2 \right]^{1/2} \times \tag{144}$$

$$\left[|\vec{L}|^2 - 2EI_1 - I_2(I_2 - I_1) W_2^2 \right]^{1/2}$$

ניתן לפתור משוואה זו במונחים של פונקציה האליפטית של יעקובי, sn. ואז מוצאים את W_1 ו- W_3 באופן מפורש - הן גם פונקציות אליפטיות. וכמובן שכל ה-W הן מחזוריות בזמן. אפשר לראות את זה עבור W_2 ישר מהצורה שכן W_2 הולכת וגדלה עד שהיא חייבת להיעצר כאשר אחד מהגורמים המופיעים מתאפס, ואז W_2 קטנה עד שהוא מגיע לשלילי של ערכו המקסימלי. כל התנועה בין מקסימום למינימום לוקחת זמן

$$\tfrac{1}{2}\tau = \int \frac{dW_2}{[\quad]^{1/2}[\quad]^{1/2}} \cdot I_2\sqrt{I_1 I_3} \tag{145}$$

והחזרה לוקחת אותו זמן. כל מחזור כזה לוקח באופן ברור אותו זמן. וה-W_1 ו- W_3 רוכשים המחזור הזה.

וכיצד נראית התנועה במערכת המעבדה? משתמשים בזוויות אוילר. יש לנו, אם ניקח ציר z לאורך $\vec{L}$:

$$L_3 = I_3 W_3 = |\vec{L}| \cos\theta$$

$$L_1 = I_1 W_1 = |\vec{L}| \sin\theta \sin\psi \tag{146}$$

$$L_2 = I_2 W_2 = |\vec{L}| \sin\theta \cos\psi$$

כיוון ש W_3 מחזורית בזמן נובע ש θ מחזורית. לאחר נחלק המשוואות הבאות נקבל

$$\tan\psi = \frac{I_1}{I_2}\frac{W_1}{W_2} \tag{147}$$

שמראה שגם ψ מחזורית. כיוון מהרגלים של W_1 ו- W_2

מ (113) מקבלים

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot\phi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2 \qquad (148)$$

ומכאן ש

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \dot\theta^2}{\sin^2\theta} \right)^{1/2} \qquad (149)$$

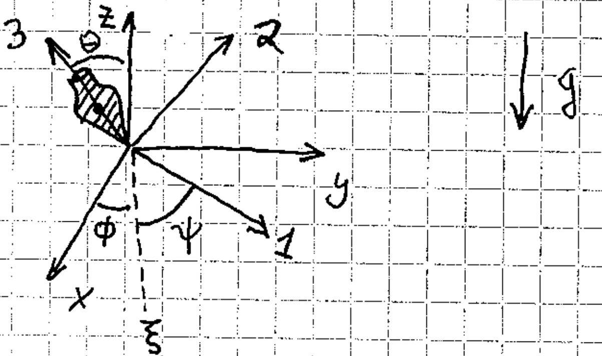
כעת θ מחזורית ולכן $\dot\theta$ מחזורית עם אותו מחזור כמו ω_1, ω_2 ו- $\sin^2\theta$. לכן $\dot\phi$ מחזורית. אך האינטגרל שלה, ϕ, אינו מחזורי בד"כ. לכן המסקנה היא שצירי הגוף מקיפים את סביב $\vec{L}$ תנועה לא מחזורית. זה בניגוד לתנועה המחזורית של $\vec{\Omega}$ ביחס לצירים העקרוניים.

גם המשוואות $\phi(t), \theta(t)$ ו- $\psi(t)$ ניתן לבטא במונחים של פונקציות אליפטיות.

VI. הסביבון הסימטרי בשדה כבד

נראה הבעיה של סביבון חנוכה.

(150)



מרכז המסה של הסביבון נמצא מרחק d מנקודה הקבועה (החוד של הסביבון). הכח Mg פועל על מרכז המסה. נבחר הראשית לא ב-CM, כי אם בנקודה הקבועה, ולכן לפי (59) במערכת החדשה

$$I_1' = I_2' = \int \rho \left[(d + x_3)^2 + x_1^2 \right] dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (151)$$

$$I_3' = \int \rho \left[x_1^2 + x_2^2 \right] dx_1\, dx_2\, dx_3$$

כאן x_j הם ביחס ל-CM כרגיל. בגלל זה $\int x_3 \rho\, d^3x = 0$ ולכן

$$I_1' = I_2' = I_1 + Md^2 = \int \rho (x_3^2 + x_1^2)\, d^3x + Md^2 \qquad (152)$$

$$I_3' = I_3 = 2\int \rho\, x_1^2\, d^3x$$

I_j כאלו הם מומנט התמדה לפי CM כראשית. אם נציב עתה ה-I_j' במקום ה-I_j בביטוי (115) ונתעלם מה $\frac{1}{2}MR^2$ נקבל הלגרנז'יאן המתאים

97

(153)
$$L = \frac{1}{2}(Md^2+I_1)(\dot\theta^2+\sin^2\theta\,\dot\phi^2)+\frac{1}{2}I_3\cos^2\theta\,\dot\phi^2 + \frac{1}{2}I_3\dot\psi^2 + I_3\dot\psi\dot\phi\cos\theta - \underbrace{Mgd\cos\theta}_{V}$$

האבר $\frac{1}{2}Md^2 \dots$ הוא בעצם אנרגיה הקינטית של מרכז המסה והיא כן נלקחה בחשבון.

כיוון שאין L תלוי ב ϕ ולא ב ψ יש לנו שתי שמורות מיד

(154)
$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta) = I_3 w_3 = L_3$$

(155)
$$p_\phi = \left[(Md^2+I_1)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right]\dot\phi + I_3\dot\psi\cos\theta$$
$$= (Md^2+I_1)\sin^2\theta\,\dot\phi + p_\psi\cos\theta$$

ויש לזהות p_ϕ עם L_z לפי הכלל שתנע קנוני של זווית הוא תנע זוויתי לכוון של ציר הסבוב של אותה זווית.

מ(154)-(155) אנו לומדים ש

(156)
$$\dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{(Md^2+I_1)\sin^2\theta} = \Omega_{pr}(\theta)$$

(157)
$$\dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{(Md^2+I_1)\sin^2\theta}\cos\theta$$

הזהוי $\Omega_{pr} \leftrightarrow \dot\phi$ מבוסס על זה ש ϕ קובע התלוזה של ציר הסימטריה סביב ציר z. ההבדל בין המקרה הזה לקודמים הוא בזה ש $\vec{L}$ לא וקטור שמור בגלל שיש מומנט בכיוון θ (הרי V תלוי ב θ), ולכן גם θ לא זווית שמורה כאן.

כדי, למצוא $\dot\theta$ ניקח את האנרגיה השמורה ישירות מ(153)

$$E = \frac{1}{2}(Md^2+I_1)(\dot\theta^2+\sin^2\theta\,\dot\phi^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)^2 + Mgd\cos\theta$$
(158)

את המחובר הכולל I_3 נתרגם לפי (154), ובמקום $\dot\phi$ במחובר הראשון נציב מ(156):

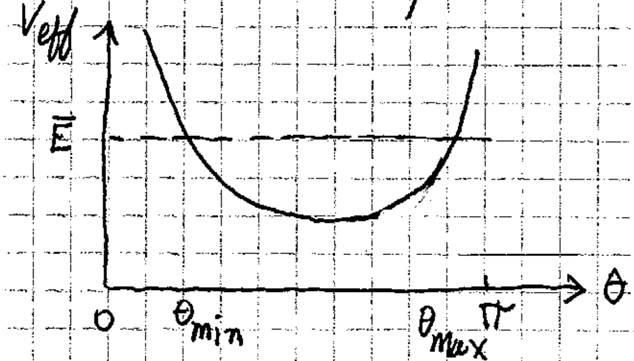
$$\bar{E} \equiv E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} - Mgd = \frac{1}{2}(Md^2+I_1)\dot\theta^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2(Md^2+I_1)\sin^2\theta} - Mgd(1-\cos\theta)$$
(159)

אפשר לפרש הביטוי הזה כאנרגיה $\bar{E}$ של חלקיק בעל מסה (Md^2+I_1)

הנע במהירות θ במימד אחד תוך הפוטנציאל

$$(160)\quad V_{eff}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2(Md^2+I_1)\sin^2\theta} - Mgd(1-\cos\theta)$$

כאשר $p_\phi \neq p_\psi$ זה נראה כך



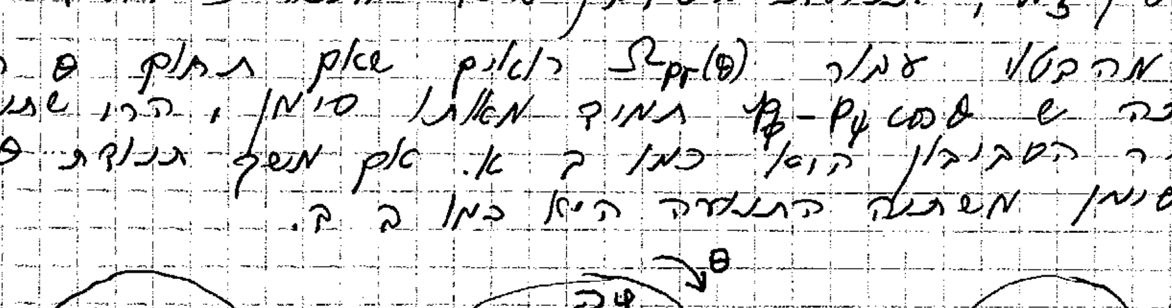
באופן שזווית θ הולכת מחזורית, הולך ומחזר בין θ_{min} ל θ_{max}. תנועה זו נקראת "נוטציה".

המחזור הוא

$$(161)\quad T = \oint \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{Md^2+I_1}\left(E - V_{eff}(\theta)\right)}}$$

כיוון שזה לא יהיה זהה למחזור הקיפה או מחזור הספין ω_3, תנועת הסביבון אינה מחזורית במצב כללי.

מהביטוי עבור $\Omega_{pr}(\theta)$ רואים שאם תחום θ הוא כזה ש $p_\phi - p_\psi\cos\theta$ תמיד מאותו סימן, הרי שתנועת ציר הסביבון הולך כמו ב א. אם משתנה בתנודת θ הסימן משתנה התנועה היא כמו ב ב.



אם גבול התחתון של θ עושה $p_\phi - p_\psi\cos\theta = 0$ התנועה הולכת כמו ב ג. אפשר לסדר זה אם נותנים לסביבון ספין חזק ומעמידים הציר בנטיה אבל בלי תנועה התחלתית.

ובאפשר $p_\phi = p_\psi$ (כלומר $L_3 = L_z$ - סביבון זקוף), אפשר עבור θ קטן לפתח בטור θ ועוד

98 ב'

$$(162) \qquad V_{eff}(\theta) = \left(\frac{L_3^2}{8(Md^2+I_1)} - \frac{1}{2}Mgd \right)\theta^2 + \cdots$$

רואים שעבור

$$L_3^2 > 4Mgd(Md^2+I_1)$$

הסיטואציה (סביב $\theta=0$) יציבה. אומרים שהסביבון "ישן". כאשר החיכוך מוריד L_3 מתחת לגבול זה, המצב נעשה לא-יציב, והסביבון "מתעורר" ונופל.

VIII דינמיקה המילטונית

גירסת לגרנג' של המכניקה מסוגלת להתמודד עם כל בעיה מכנית. אבל יש בעיות שאפשר להאיר אותן במיוחד בשיטה אלטרנטיבית של המילטון. גירסה זו גם חשובה בנוסף בשטחים אחרים של הפיזיקה כגון תורת הקוונטים או תורת השדות.

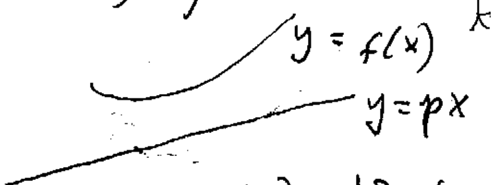
א. משוואות המילטון

הרעיון של דינמיקה המילטונית הוא להחליף משתנים $\{q_j, \dot{q}_j\}$ ב- $\{q_j, p_j\}$ כאשר

$$(1) \qquad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

הדבר אפשרי כי מ-$2N$ משתנים עוברים ל-$2N$ משתנים אחרים. פורמלית, המעבר נעשה בטרנספורמציית לז'נדר.

נניח שנתונה פונקציה קעורה $f(x)$: ס"ג f''. נסתכל על המרחק האנכי בינה לבין קו הישר $y=px$. המרחק המינימלי הוא



$$\min\left[f(x) - px\right]$$

הוא פונקציה של p, ונקרא לו $g(p)$. ברור ש

$$g(p) = f(x(p)) - p\,x(p)$$

כאשר $x(p)$ הוא השורש של המשוואה

$$(2) \qquad f'(x) - p = 0$$

$g(p)$ הוא הטרנספורם לז'נדר של $f(x)$.