III: חוקי שימור

הפתרון של כל משוואות לגרנג' דורש מתן q ו-$\dot{q}$ בזמן מסוים כתנאי התחלה, נקרא לו $t=0$. נניח שאנו פותרים ומסמנים את הפתרונות $q_j(t)$ שהם פונקציות של $\dot{q}_j(0)$ ו-$q_j(0)$ עבור אלה ההתחלתיים, נקבל אם כן נקבל כל דרישה תלויה ב-2 קומבינציות של q_j ו-$\dot{q}_j$ הן קבועות בזמן. מיד זה מראה שקיימים $2n$ קבועי תנועה במערכת. רק שבדרך כלל הקומבינציות כוללות גם את t, ולכן אין השיג גדול שום דבר קבוע במערכת.

יש מערכות שבהן קבועי תנועה קיימים שאינם כוללים t. אלה נקראים שמורות או אינטגרלי תנועה.

א. התנע הקנוני

מושג שנוטש בהרבה הנושא הוא התנע הקנוני. לכל q_j יש תנע קנוני או צמוד אליו:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \qquad (1)$$

הגדרה זו תשנה כאן טוב רק כאשר אין שדות מגנטיים (ראה II.99). למשל, בלי אילוצים ושימוש עם קואורדינטות קרטזיות

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - V(\vec{r}_i, t) \qquad (2)$$

$$p_j = m_i v_j \qquad (3)$$

כלומר התנע הקנוני זהה לתנע הרגיל (תנע קווי). אבל זה לא תמיד נכון. בנוכחות שדה מגנטי

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \qquad (4)$$

ולכן

$$p_j = m v_j + \frac{e}{c} A_j \qquad (5)$$

ויש הבדל בין שני סוגי התנע.

עפ"י משוואות לגרנג' בהעדר כח לא משמר

$$\frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (6)$$

ולכן במקרה שבו סיטואציה בה אחת מהקואורדינטות

כמו כאשר נעדרת מ L , התנע הקנוני המתאים הוא שמורה.

2. שמורת תנע מתקבלת כאות סימטריה

בפיסיקה המודרנית רואים חוקי שמור כביטוי של סימטריות במערכת. זה מאוד בולט בעניין התנע.

ראינו בה. II שבהומוגניות המרחב מאפשרת הלגרנז'יאן של חלקיק חפשי להיות בלתי תלוי במיקום. לפי משוואות לגרנז' זה אומר

$$\frac{d}{dt} p_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

ולכן כל רכיבי התנע (הקנוני) שמורות.

עכשיו מערכת עם הרבה חלקיקים שביניהם כוחות אינטראקציה, אך המערכת בכללה לא מושפעת מכוחות חיצוניים, הומוגניות המרחב אומרת ש L ישאר בלי שינוי (אינווריאנטי) תחת ההזזה

$$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\epsilon} , \quad \forall i \qquad (8)$$

כאשר $\vec{\epsilon}$ וקטור שרירותי. בפרט זה נכון עבור $\vec{\epsilon}$ אינפיניטסימלי. אז

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad (9)$$

לכן

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \qquad (10)$$

כיוון ש $\vec{\epsilon}$ ב (9) שרירותי, הסכום ב (10) חייב להתאפס ולכן

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0 \qquad (11)$$

שהוא חוק שמור תנע הכולל. ברור מלמעלה איך סימטרית המרחב תחת העתקה גוררת אחריה שמור תנע הכולל.

דרך אחרת להסתכל על שמור תנע כולל הוא להגדיר את הקואורדינטות מרכז המסה לפי (I.12). כיוון שהזזת המערכת בכללותה תשנה $\vec{R}$, ברור שאין L יכול להיות תלוי ב $\vec{R}$ עצמו (הומוגניות המרחב). אז אם נחשוב על $\vec{R}$ כעל קואורדינטה מוכללת, הרי שלפי

משוואות לגרנז' התנע הקנוני של $\vec R$ צריך להיות שמור. ברור שזה בדיוק $\vec P=\sum \vec p_i$ שכן

(12) $$\vec P = \sum \vec p_i = \sum m_i \frac{d\vec r_i}{dt} = M\frac{d\vec R}{dt}$$

ומתרגיל זה מסתבר ש $\vec R$ ו- $\dot{\vec R}$ נכנסים ללגרנז'יאן כמו כל קואורדינטה קרטזית. המסקנה היא שעקב הומוגניות המרחב מרכז המסה של מערכת שומר על מהירותו בגודל ובכיוון (בהעדר כוח חיצוני).

(7) →

ג. שמור תנע זוויתי ואיזוטרופיות המרחב

בפרק I גילינו את שמור תנע זוויתי של חלקיק המרגיש כח מרכזי, או של מערכת שלמה בלי כוחות חיצוניים ע"י מניפולציה של המשוואות. כאן נראה איך הסימטריה מחייבת חוקי שמור כאלה.

כאשר כל [illegible] אחד בכח חיצוני מרכזי ברור שאפשר (בתנאי שהכח משמר) לכתוב הפוטנציאל כסימטרי כדורי. לכן

(13) $$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{\partial K}{\partial\varphi} - \frac{\partial V}{\partial\varphi} = \frac{\partial K}{\partial\varphi}$$

אך (השווה II.50)

(14) $$K = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)$$

ולכן $\partial K/\partial\varphi = 0$ וודאי ש p_φ שמור. למעשה עקב הסימטריה הכדורית, אפשר לבחור הקואורדינטות φ ו- θ באופן לפי רצוננו והתוצאה אומרת שכל רכיב זוויתי של $\vec p$ חייב להשמר. נשתמש בתורה, אנו מקבלים

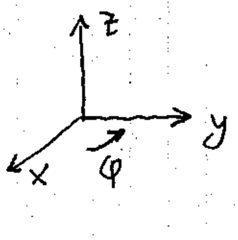
(15) $$p_\varphi = m r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = \text{const}$$

שמור שני הרכיבים אומר שאם בחרנו הקואורדינטות כך שהתנועה היתה בהתחלה בתוך מישור המשוואה, היא תשאר במישור. עם אותה בחירה $\theta=90°$ ולכן

(16) $$r^2\dot\varphi = \text{const}$$

זהו חוק קפלר השני: הקו בין מרכז הכח לחלקיק עובר על השטח בקצב קבוע.

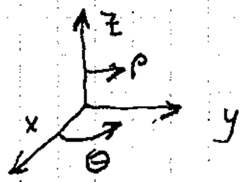
יש לשים לב



(17) $$p_\varphi = L_z = r v_\varphi = r(r\dot\varphi)$$

אז כל רכיבים של תנע קאנוני יכולים להיות רכיבים של תנע זוויתי.

ואם אנחנו כאן נבדוק עוד אפשרות: שהפוטנציאל יש לו סימטריה משולבת, כלומר



$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \tag{18}$$

אפשר לכתוב

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \tag{19}$$

ואז ברור לנו שהקבועים הם

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} \\ p_y &= m\dot{y} \\ p_\theta &= m\rho^2\dot{\theta} = L_z \end{aligned} \tag{20}$$

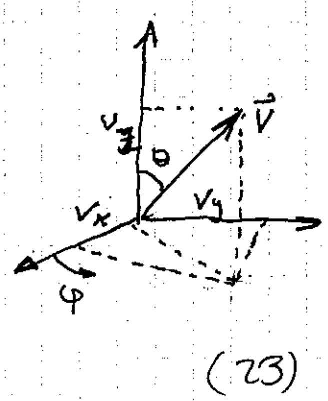
כאן שמור רכיב אחד של תנע זוויתי משולב עם שמור רכיבי תנע קווי.

כעת נעבור למערכת עם הרבה חלקיקים שביניהם יש אינטראקציה, אך המערכת כולה מבודדת. מאיזוטרופיות המרחב אנו יודעים שהלגרנז'יאן חייב להישאר אינווריאנטי כאשר מסובבים המערכת כולה עם מקומה. במקרה זה נתון עבור סיבוב אינפיניטסימלי:

$$\delta L = \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot \delta \vec{v}_i \right\} = 0 \tag{21}$$

כיצד נראים $\delta \vec{r}$ ו $\delta \vec{v}$ המתאימים לסיבוב?

לכל וקטור $\vec{V}$



$$\vec{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$$

$$\begin{aligned} V_x &= V \sin\theta \cos\varphi \\ V_y &= V \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \tag{22}$$

תחת שנוי ב φ

$$\begin{aligned} \delta V_x &= -V \sin\theta \sin\varphi \, \delta\varphi = -V_y \, \delta\varphi \\ \delta V_y &= V \sin\theta \cos\varphi \, \delta\varphi = V_x \, \delta\varphi \end{aligned} \tag{23}$$

וזה אפשר לכתוב

$$\delta \vec{V} = \delta \vec{\Phi} \times \vec{V} \tag{24}$$

בגלל שנוסחה כזו לא קשורה לסימטריה המיוחדת בתמונה
אלא אפשר לקחת $\delta\vec{\Phi}$ כווקטור הסבוב בכל כוון שנרצה.
לכן יש לכתוב (21) כך

$$\delta L = \sum_i \left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}}_{\frac{d\vec{p}_i}{dt}} \cdot \delta\vec{\Phi} \times \vec{r}_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}}_{\vec{p}_i} \cdot \delta\vec{\Phi} \times \vec{v}_i \right\} = 0 \tag{25}$$

לכן

$$\delta L = \delta\vec{\Phi} \cdot \sum_i \left\{ \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \vec{v}_i \times \vec{p}_i \right\} = \delta\vec{\Phi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{26}$$

מכיוון ש $\delta\vec{\Phi}$ שרירותי בכוון מקבלים ש

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const.} \tag{27}$$

שמור תנע זוויתי נובע מאיזוטרופיות המרחב ואינו תלוי
כלל בפרטי החלקיקים והאינטראקציה. זו התוצאה של
שיטה זו. שים לב: לא היינו צריכים להניח כח מרכזי.

7. שמור אנרגיה והומוגניות הזמן

בפרק I הוכחנו את שמור האנרגיה הכוללת של מערכת
מבודדת, או של חלקיק הנע תחת כח משמר בהתבסס
על צורה המפורשת של משוואות ניוטון. כאן נסיק
שמור אנרגיה כתוצאה מהומוגניות הזמן.

בגלל הומוגניות הזמן אנו מצפים שהלגרנג'יאן של מערכת
מבודדת (אין כחות מבחוץ) לא יהיה פונקציה מפורשת
של הזמן:

$$L = L(q_1, q_2, q_3 \ldots ; \dot{q}_1, \dot{q}_2 \cdots) \tag{28}$$

לכן

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right\} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \dot{q}_j \right) \tag{29}$$

מכאן שהכמות

$$E = \sum_j \dot{q}_j p_j - L \tag{30}$$

שמורה. מהו? קח את הלגרנג'יאן (II.80) המתאר

מערכת מבודדת עם אינטראקציות בין החלקיקים. ברור שאם נבחר ה q_j עם רכיבים קרטזיים של ה $\vec{r}_i$ נקבל ש

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \tag{31}$$

ועל כן

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{32}$$

ואם נשווה עם (I.36) נראה שיש לנו כאן האנרגיה הכוללת. אם כן, למערכת מבודדת עם אינטראקציות משמרות, שמור האנרגיה נובע מהומוגניות הזמן.

יש לשים לב: אפילו אם המערכת לא מבודדת, אך הכוחות החיצוניים אינם תלויים בזמן, אפשר להתייחס אלו אותו טיעון ולקבל שמור אנרגיה - כמובן בתנאי שנכלול האנרגיה הפוטנציאלית של הכוחות החיצוניים בלגרנז'יאן ולכן ב E.

בסיכום, סימטריות מרחב וזמן נותנות לנו 7 חוקי שמור עבור שלושת רכיבי התנע והתנע הזוויתי הכולל ועבור האנרגיה הכוללת, שמורות אלו עוזרות לפתרון בעיות, כפי שנראה.

ה. משפט אוילר והאנרגיה

נזכר במשפט אוילר עבור פונקציות הומוגניות כבסיס לפיסיקה שנראה.

פונקציה $F(x, y, z \dots)$ היא הומוגנית מדרגה α כאשר

$$F(mx, my, mz \dots) = m^{\alpha} F(x, y, z \dots) \tag{33}$$

למשל $x^2 + y^2 + z^2$ היא פונקציה הומוגנית מדרגה שניה.

כעת נניח ש $m = 1 + \varepsilon$ עם ε אינפיניטסימלי

נמשיך בפתוח טיילור

$$F((1+\varepsilon)x, (1+\varepsilon)y \dots) = \cancel{F(x,y\dots)} + \frac{\partial F}{\partial x}(x,y\dots)\,\varepsilon x + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,\varepsilon y + \dots + O(\varepsilon^2) \tag{34}$$

$$= F(x,y\dots)(1+\varepsilon)^{\alpha} = \cancel{F(x,y\dots)} + \alpha \varepsilon F(x,y\dots) + O(\varepsilon^2)$$

מכאן ש

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + \dots = \alpha F \tag{35}$$

משפט של אוילר הוא עובדה מתמטית ללא קשר
עם משמעות פיזיקלית F. יש לשים לב, אם
ישנם משתנים ב F שאינם לא משתנים דהדינמית
הומוגניות כמו ב (33), אין אנו צריכים להבדיל
בשימוש ב (35). אבל יש כן הכרח להכניס כל
המשתנים שלגביהם יש הומוגניות בחשבון.

8

נשתמש כדוגמה באנרגיה הקינטית של מערכת

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} \tag{36}$$

נעבור לקואורדינטות מוכללות q_j. נניח ש $\vec r = \vec r(q_1, q_2 ..)$,
כלומר אילוצים לא תלויים בזמן)

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j \tag{37}$$

לכן

$$K = \sum_{jk} \tfrac{1}{2}\, g_{jk}(q)\, \dot{q}_j\, \dot{q}_k \tag{38}$$

כאשר

$$g_{jk}(q) \equiv \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{39}$$

ברור ש K הומוגנית מדרגה 2 במשתנים $\dot q_j$ (אף
אין אנו מתיחסים ל q עצמן בדיון). משפט
אוילר אומר (כאן אנו מניחים שאין כח לורנץ)

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = 2K \tag{40}$$

נציב זה בהגדרת E, (30) ונקבל התוצאה
(כאשר $p_j = \partial T/\partial \dot q_j$)

$$E = 2K - K + V = K + V \tag{41}$$

לכן במקרה שהקרנו שבו האנרגיה הקינטית
והפוטנציאלית שמור - כל מה שדרוש הוא קוואדרטיות
האנרגיה הקינטית בצורתה (36) שבאופן שמלבטות
מקואורדינטות גאומטריות לקואורדינטות המרחב.

המשפט (41) נכון אפילו לגבי חלקיק טעון הנע
בתוך שדה אלקטרומגנטי, אף על פי שלא מהירות
מופיעה באבר הפוטנציאלי.

$$L = \tfrac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} - e\phi + \frac{e}{c} \vec{A}\cdot\vec{v} \tag{42}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A} \tag{43}$$

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \left(m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{v} - \tfrac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} + e\phi - \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} + e\phi \tag{44}$$

1. משפט הוויריאלי

נתחיל עם הביטוי

(45) $$K = \sum_{jk} \frac{1}{2} g_{jk}(q)\, \dot q_j\, \dot q_k$$

וברור ממנו ש,

(46) $$2K = \frac{d}{dt}\sum_j p_j q_j - \sum_j \frac{dp_j}{dt} q_j$$

בהנחה שאין $\dot q_j$ מופיעה אלא ב K. כעת נאנטגרל המשוואה על זמן מ 0 עד $t=T$ כאשר T שואף ל ∞. נשתמש בנוטציה

(47) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left\langle \int_0^T f\, dt \right\rangle \equiv \langle f \rangle$$

אז מ (46) נקבל ש

(48) $$2\langle K\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T} \sum_j p_j q_j \Big|_0^T - \left\langle \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} q_j \right\rangle$$

הסכום האחרון כונה ה- virial ע"י קלאוזיוס. אם הקואורדינטות והתנעים חסומים בגודלם לאורך הזמן הרי שהאיבר הראשון מימין מתאפס בגבול ומקבלים

(49) $$2\langle K\rangle = -\left\langle \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} q_j \right\rangle$$

שהוא משפט הוויריאלי בצורה הכי כללית. והוא מוכר יותר כאשר משתמשים בקואורדינטות קרטזיות שאז בגלל ש q_j לא מופיעות ב K ולכן

(50) $$2\langle K\rangle = +\left\langle \sum_i \vec r_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec r_i} \right\rangle$$

בדוגמה נניח שישנה מערכת מבודדת עם פוטנציאלים פנימיים מהצורה ניוטוניות או קולומביות. כל איבר בפוטנציאל כזה תלוי ב $\vec r$ השונים לפי

$$\frac{1}{|\vec r_i - \vec r_j|}$$

ולכן V הוא הומוגני מסדר -1 ב $\vec r_i$ השונים. לפי משפט אוילר

(51) $$\sum_i \vec r_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec r_i} = -V$$

לכן, לפי משפט הוויריאלי

$$\langle 2K \rangle = -\langle V \rangle \tag{52}$$

אך כיוון ש $E = K + V$ שהוא שמור

$$\langle K \rangle = -\tfrac{1}{2}\langle V \rangle = -E \tag{53}$$

לומדים מכך שעבור מערכת שמוגבלת במרחב ובתנע E חייבת להיות שלילית: המערכת היא קשורה.

עוד דוגמה: מערכת הרמוניות המוגדרות כזאת שהאנרגיה הפוטנציאלית היא קוואדרטית ב-$\vec{r}_i$. נראה שזה הטיפוס של חומר מוצק בכללותו. אז

$$V = \sum \tfrac{1}{2}\, \vec{r}_i \cdot \overleftrightarrow{\Omega} \cdot \vec{r}_j \tag{54}$$

כאשר $\overleftrightarrow{\Omega}$ הוא טנזור (מטריצה) קבוע. כאן

$$\sum_i \vec{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} = 2V \tag{55}$$

ולכן כאן

$$\langle K \rangle = \langle V \rangle = \tfrac{1}{2}E$$

כלומר חצי האנרגיה נמצאת בממוצע בצורה קינטית.

9 →

IV שיטות פתרון משוואות התנועה

א. שיטת הדמיה (סקיילינג)

לשיטה זו לפתרון משוואות ניוטון או לגרנז' יש כמה וכמה פנים.

קודם כל נניח שלמערכת יש לגרנז'יאן

$$L = K - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots) \qquad (1)$$

כאשר ל V יש תכונת הומוגניות

$$V(a\vec{r}_1, a\vec{r}_2 \dots) = a^k V(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots) \qquad (2)$$

נניח שפתרנו את המשוואות וקבלנו פתרון

$$\{\vec{r}_i(t) = \xi f_i(t/\tau)\ ;\ i = 1,2 \dots\} \qquad (3)$$

כאן ξ נותן סקלת המסלולים, τ זמן האופייני למערכת לעבור חלק ניכר מהמסלול. מסתבר שגם

$$\{\vec{r}_i{}'(t) = a\xi f_i(t/\tau a^{1-k/2})\ ;\ i = 1,2 \dots\} \qquad (4)$$

הוא פתרון. כי המהירות של (3) הוא

$$\{\vec{v}_i(t) = \frac{\xi}{\tau} f_i'(t/\tau)\ ;\ i = 1,2 \dots\} \qquad (5)$$

ושל (4) פי $a^{k/2}$ גדולה ולא בשלבי התלוק במסלולים. לכן אחרי הטרנספורמציה מ (3) ל (4) K עלתה בפקטור a^k וגם V עלתה באותו פקטור. יוצא אם L הוא פי כמה מ L המקורי בהכרח יש לו אותן משוואות תנועה ולכן הפתרון (4) הוא פתרון של הלגרנז'יאן המקורי.

ברור מכל זה שעבור 2 מסלולים דומים (אותן פונקציות f_i) הפרמטרים עומדים ביחס:

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^k ; \quad \frac{v'}{v} = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{k/2} ; \quad \frac{\ell'}{\ell} = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{1+k/2} \qquad (6)$$

$$\frac{\tau'}{\tau} = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{1-k/2}$$

למשל, עבור פוטנציאל קולומבי או ניוטוני $k=-1$

ולכן

(7) $E \propto \xi^{-1}$ $\quad v \propto \xi^{-1/2}$ $\quad l \propto \xi^{1/2}$ $\quad \tau \propto \xi^{3/2}$

ב ד. IV נשתמר החוק הראשון והאחרון הנקרא חוק קפלר השלישי.

אם הפוטנציאל הוא הרמוני כמו ב III,54, $k=2$

ולכן

(8) $E \propto \xi^{2}; \quad v \propto \xi; \quad l \propto \xi^{2}; \quad \tau \propto \xi^{0}$

החוק האחרון כאן שמחזור מסלול בפוטנציאל הרמוני בלתי תלוי בגודלו – למשל מחזור מטוטלת שלה לאמפליטודה גדולה או קטנה (אבל לא גדולה מדי).

כעת נשווה מסלול עם סקלה ξ במערכת עם מסות m_i ופוטנציאל V למסלול דומה עם סקלה $a\xi$ כאשר המסות הן γm_i והפוטנציאל ϵV (γ, ϵ קבועים חיוביים). במקום (4) יש לנו עתה הפתרון

(9) $\{\vec{r}_i'(t) = \overbrace{a\xi}^{\xi'} f_i(t/\tau\sqrt{\gamma/\epsilon}\, a^{1-k/2});\ i=1,2..\}$

כי עבור הן T הן V עולים באותו פקטור ϵa^k כאשר המסות משתנות בפקטור γ. לכן

(10) $\frac{E'}{E} = \varepsilon\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{k}; \quad v \propto \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{1/2}\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{k/2}; \quad \frac{l'}{l} = (\varepsilon\gamma)^{1/2}\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{1+k/2}$

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{1-k/2}$$

לדוגמה עבור פוטנציאל ניוטוני $\varepsilon = \left(\frac{m'}{m}\right)^2$ וכרגיל $\gamma = \frac{m'}{m}$.

לכן

(11) $E \propto m^{2} \quad v \propto m^{1/2} \quad l \propto m^{3/2} \quad \tau \propto m^{-1/2}$

ואם הפוטנציאל הוא הרמוני ולא תלוי במסות, אזי $E \propto m^0$ ועדיין $\gamma = m'/m$. לכן

(12) $E \propto m^{0}; \quad v \propto m^{-1/2}; \quad l' \propto m^{1/2}; \quad \tau \propto m^{1/2}$

~~בדוק עבור פוטנציאל הרמוני IV.54 לנדאו. לפי~~
~~אם משווה מסלולים דומים של אותה מערכת~~

(17) $\cancel{E \propto \xi^2 \qquad L \propto \xi^2 \qquad T \propto \xi^0}$

~~ז"א שזמן מחזור מסלול תלוי בגודלו~~
~~ואם משווה מערכות השונות רק בסקלת המסה~~

(18) $\cancel{E \propto m^0 \qquad L \propto m^{1/2} \qquad T \propto m^{1/2}}$

(10) →

ב. פתרון תנועה חד-ממדית

במימד אחד התנועה תחת כח משמר הכללית מתוארת ע"י

(19) $$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

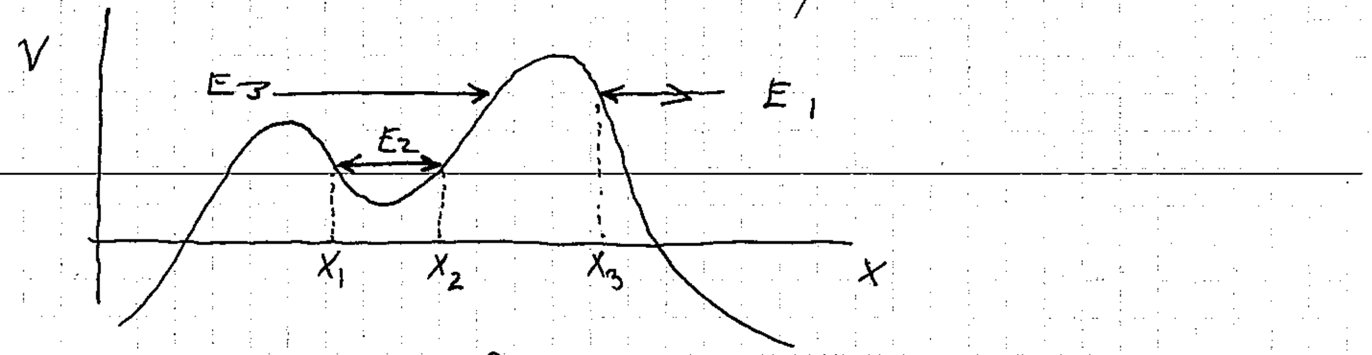
שימור אנרגיה (הנחנו V בלתי תלוי בזמן) הוא

(19'a) $$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E = \text{const.}$$

זהו האינטגרל הראשון או הקבועה הראשונה. ממנו

(20) $$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

כיצד מתחשבים לבחירת סימן שפרושה בחירה בכיוון תנועת החלקיק? התנועה חייבת להיות רציפה - זה אומר ששינוי הסימן יתכן רק כאשר $\dot{x}$ מתאפס, כלומר כאשר החלקיק מגיע לנקודה בה $V(x) = E$ (נקודת מפנה), שם הוא יכול להחליף כיוון. למשל



אם החלקיק הושם בין x_1 ל-x_2 באנרגיה E_2 הוא ינוע שמאלה וימינה בין אותן נקודות. אם הוא הושם בצד ימין עם אנרגיה E_1 ונוסע בכיוון שמאל הוא יחליף כיוונו ב-x_3 וימשיך וימשיך כלפי חוץ ימינה.

מ-(20) אפשר לקבל (נבחר עם סימן +)

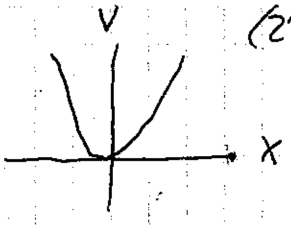
(21) $$t = \text{const.} \pm \int^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}\,dx$$

שבעצם הפתרון למשוואות התנועה (אם לא פתרנו אותן כיוון ששימור האנרגיה היה לנו לעזר). הקבוע ב (וב) הינו תוצאה של ברירה בבחירת זמן התחלת התנועה.

אם נרצה לדעת את מחצית התנועה בין x_1 ל x_2 פשוט נכתוב

(22) $$\tau = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$

כיוון שמיקום x_1 ו- x_2 תלוי ב E, $\tau = \tau(E)$. כדוגמה ניקח



(23) $$V(x) = A|x|^n$$

זהו פוטנציאל הומוגני, ולכן מהקודמה (משוואות (10)) אנו למדים ש

(24) $$E \propto A\xi^n \qquad \tau \propto \left(\frac{m}{A}\right)^{1/2} \xi^{1-n/2}$$

אם נסלק ξ מכאן נלמד ש

(25) $$\tau \propto m^{1/2} A^{-1/n} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$$

אפשר לבדוק כל אלה ע"י חשוב מפורש של τ לפי (22). נכתוב $V = Ax^n$ עבור $x \geq 0$ ונקבל בדרך

(26) $$\tau = 4\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - Ax^n\right)}}$$

ברור שכאן

(27) $$x_1 = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}$$

ולכן בשינוי המשתנה $y = x/x_1$

(28) $$\tau = 2\sqrt{2m}\, A^{-1/n} E^{1/n - 1/2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

עם שינוי המשתנה $u = y^n$ האינטגרל כאן הופך ל

(29) $$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}\; u^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)$$

כאן

(30) $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

וידוע ש

(31) $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

כאשר

(32) $$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

ולכן

(33) $$\tau = \frac{2}{n}\sqrt{2m}\, A^{-1/n}\, E^{1/n-1/2}\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$$

כיוון ש

(34) $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

מקבלים סופית

(35) $$\tau = \frac{2\sqrt{2\pi m}}{A^{1/n}}\, E^{1/n-1/2}\, \frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$$

זה מאשר מסקנה (24).

ד. תנועה דו-גופית באופן כללי

לפי (II.80) תנועת שני גופים עם כח ביניהם משמר מתוארת

(36) $$L = \tfrac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{\,2} - V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

כפי שהתברר בתרגיל המנוחות של הקואורדינטות המוכללות

(37) $$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

(38) $$L = \tfrac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

(39) כאשר $$M = m_1 + m_2 \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

כפי שאמרנו, כיוון שאין כוחות חיצוניים $\dot{\vec{R}}$ נשמר ואפשר לעבור למערכת (מערכת מרכז המסה) בה הוא מתאפס. על כן נשארנו עם הקואורדינטות המוכללות $\vec{r}$. הבעיה היא, אם כן, בעיה של חלקיק בודד בעל מסה μ בפוטנציאל כדורי (כוח מרכזי) $V(r)$. לכן נשמר תנע זוויתי

(40) $$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = const.$$

לפי (40) ו- $\vec{r}$ ו- $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ שהיא שמתקיים במשור הניצב ל- $\vec{L}$ שהוא משור קבוע. לכן התנועה מתנהלת במשור. זה מאפשר את φ לקבועה בבחירה מתאימה של מערכת קואורדינטות, ולכן במונחים של הקואורדינטות הנותרות r ו- θ

(41) $$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

לפי (III.15-17) אנו יודעים ש

(42) $$l = p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

זהו חוק קפלר (התנועה מכסה שטח בקצב קבוע) התקף כל זמן שהפוטנציאל הוא מרכזי. מ (42) אפשר לקבל

(42') $$\theta = \text{const} + \frac{l}{\mu}\int^t \frac{dt}{r^2}$$

שנותן את $\theta(t)$ אם יודעים $r(t)$. את האנרגיה אפשר לקבל משימור האנרגיה כאן

(43) $$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \text{const}$$

אם נחליף $\dot{\theta}$ כאן לפי (42) נקבל

(44) $$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

(45) $$V_{eff}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

אבל (44) נראה בדיוק כמו (19') ולכן נוכל להשתמש בטכניקות של תנועה במימד אחד כאן להסיק את $r(t)$.

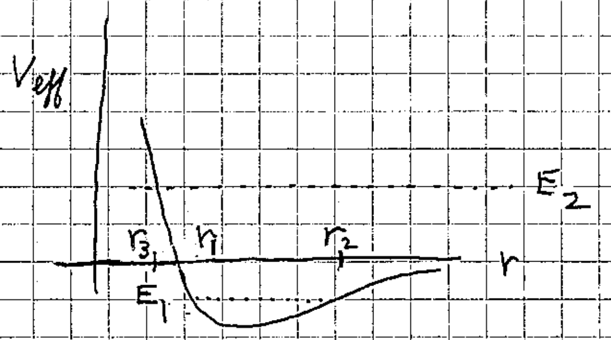
ראשית כל, באנלוגיה ל- (20) ו- (21) יש לנו

(47) $$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$$

(48) $$t = \text{const.} \pm \int^r \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}\,dr$$

שים לב: החלקיק יכול להחליף את תנועה (סימן השורש) רק בנקודת המפנה בה $E = V_{eff}$. כדוגמה, נקח פוטנציאל גרביטציוני

(49) $$V_{eff} = -\frac{GM_1M_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



עם האנרגיה E_1 המרחק בין החלקיקים נע בין r_1 ל r_2.
ב r_1 הוא מפסיק לקטון ומתחיל לגדול והיפוך ב r_2. נקודות
המפנה r_1 ו- r_2 הן שני השורשים של המשוואה (לכל $V(r)$)

(50) $\xrightarrow{\text{II}}$ $$V_{eff}(r) = E$$

התנועה הרדיאלית היא מחזורית, ובאנלוגיה ל (22) המחזור
הוא (כאן נתנה לפי נוסחה כללית)

(51) $$T_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

אפשר גם לדבר על מחזור התנועה ב θ, כלומר הזמן
ש θ דורשת להשתנות ב 2π. אבל כדאי להתחיל מ (42½)
כיוון שאין אנו יודעים $r(t)$ מפורשות בד"כ. אבל אפשר
לחלק $\dot{r}$ מ (47) ב $\dot{\theta}$ מ (42) ולקבל

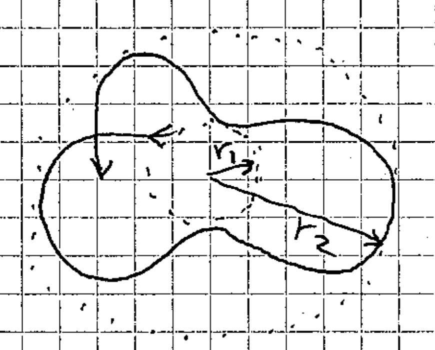
(52) $$\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r^2\sqrt{2\mu\left(E - V_{eff}(r)\right)}}{L}$$

שממנה רואים איך r משתנה כאשר θ מתקדמת:

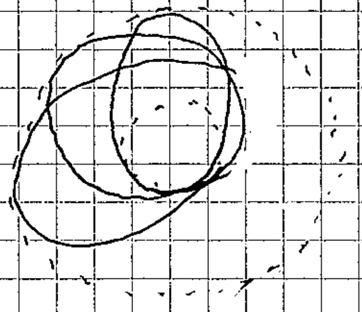
(53) $$\theta = \int_{r_1}^{r} \pm \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

כאן לקחנו $\theta = 0$ בנקודה r_1 (פריהליון במערכת השמש).

כאשר לפי (53) $\theta(r_2) < \pi$, הרי שבמשך מחזור רדיאלי
T_r אין θ מסוובת סביב שלם, ואפשר לאמר ש $T_r < T_\theta$.
התנועה נראית כזאת:



ואם $\Theta(r_2) > \pi$ התנועה הזוויתית מסיימת מחזור
טרם סיום מחזור הרדיאלי ($T_\theta < T_r$). עבור
$T_\theta \lesssim T_r$ התנועה נראית כך



באיזה תנאי יסגר המסלול על עצמו? מ-(53) נקבל

$$(54) \qquad \Delta\Theta = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2\mu(E - V_{eff}(r))}}$$

$\Delta\Theta$ הוא תזוזת θ במשך זמן T_r. ברור שאם $\frac{\Delta\Theta}{2\pi}$ הוא מספר שלם או שבר, מספר שלם של T_r זהה למספר שלם של T_θ והתנועה היא על מסלול סגור, ותחזור מאוחר יותר על עצמה. בפוטנציאל הגרביטציוני (49) $\Delta\Theta/2\pi$ הוא בדיוק היחידה.

כל הדיון הנ"ל הוא עבור מקרה שיש שתי נקודות מפנה, כמו $E<0$ עבור הפוטנציאל (49). ויתכן מקרה של נקודת מפנה אחת (כמו $E\geq 0$ עבור (49)). אז התנועה היא לא חסומה והמערכת אינה קשורה, החלקיק יתקרב רק פעם אחת עד $r=r_1$ ומשם יתרחק. אפשר לשאול מה שקורה כאשר שני החלקיקים דוחים זה את זה. לדוגמא, במקרה של פוטנציאל קולומבי $(e_1e_2>0)$

$$(55) \qquad V_{eff}(r) = \frac{Ze_1e_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

יש רק מקרה של מערכת לא קשורה.

ד. <u>בעיית קפלר</u>

בעיית קפלר היא הבעיה של תנועה דו-גופית בפוטנציאל גרביטציוני, כלומר הפוטנציאל האטרקטיבי הנתון (49). מעבר לתכונות הכלליות שבררנו לעיל ניתן לאמר דברים ספציפיים כאן. נתחיל בפתרון המשוואה (52) אם כן

$$(56) \qquad \frac{dr}{d\Theta} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2\mu\left(E + \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)}$$

מכאן אנו עושים הקוודרטורה עבור θ. במונחים של $\frac{1}{r} \equiv u$

(57) $$\theta = \theta_0 - \int^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu G m_1 m_2}{L^2} u - u^2}}$$

יש להשוות עם האינטגרל הסטנדרטי

(58) $$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = -\frac{1}{\sqrt{-A}} \sin^{-1}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right)$$

במקרה שלנו

$$A = -1 \quad ; \quad B = + \frac{2\mu G m_1 m_2}{L^2}$$

(59) $$C = \frac{2\mu E}{L^2} \quad ; \quad B^2 - 4AC = \frac{4\mu^2 G^2 m_1^2 m_2^2}{L^4} + \frac{8\mu E}{L^2}$$

אבל כן נקבל אינטגרל ממשי כל עוד

(60) $$E \geq -\frac{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}{2L^2}$$

ולכן

(61) $$\theta = \theta_0 + \sin^{-1}\left(\frac{1 - \frac{L^2 u}{G m_1 m_2 \mu}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 \mu m_1^2 m_2^2}}}\right)$$

בפתרון נקבל r

(62) $$r = \frac{1}{u} = \frac{L^2/(G m_1 m_2 \mu)}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 \mu m_1^2 m_2^2}}\,\sin(\theta - \theta_0)}$$

מקובל לעבוד עם זווית אחרת

(63) $$\phi = \theta - \theta_0 + \pi/2$$

ואז

(64) $$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\phi}$$

(65) $$\varepsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 \mu m_1^2 m_2^2}} \qquad a \equiv -\frac{G m_1 m_2}{2E}$$

לפי (65) ε תמיד ממשי וחיובי או אפס. יש כמה מקרים שונים לפי ערכו של ε. הוא קובע צורת המסלול.

<u>עיגול</u> $E = -\frac{G^2 m_1^2 m_2^2}{2L^2}$ $\quad \varepsilon = 0$

<u>אליפסה</u> $0 > E > -\frac{G^2 m_1^2 m_2^2}{2L^2}$ $\quad 0 < \varepsilon < 1$

<u>פרבולה</u> $E = 0$ $\quad \varepsilon = 1$ (גבול $a \to \infty$)

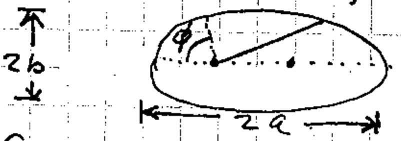
<u>היפרבולה</u> $E > 0$ $\quad \varepsilon > 1$

כאשר $E<0$ (מערכת קשורה) המסלול הוא עיגול או אליפסה. מרכז המסה הוא באחד המוקדים של האליפסה שכן

$$r_{max} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) \tag{66}$$
$$r_{min} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon)$$

מתקבלים עבור $\phi=0$ ו- $\phi=\pi$ (ולא $\phi=0$, $\phi=\frac{\pi}{2}$ אם המרכז היה במרכז האליפסה). זהו חוק קפלר הראשון. ε הוא האקסצנטריות.

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{67}$$



$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}$$

לכן a נקרא חצי ציר הגדול. לפי (65) גודלו של a נקבע ע"י E בלבד (ולא L). כל זה בהתאם לחוק (III.15)

נחשב מחזור המסלול. לפי (42) קצב כסוי שטח המסלול.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = L/2\mu \tag{68}$$

לכן

$$\tau = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{L/2\mu} = \frac{2\pi a^2 \mu}{L}\sqrt{-\frac{2EL^2}{G^2 \mu m_1^2 m_2^2}} \tag{69}$$
$$= 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{G m_1 m_2}}\, a^{3/2}$$

בהתאם ל (III.15) ש T תלוי בגודל המסלול (או באנרגיה כאן) אך לא בצורת המסלול (או L). → (12)

המקרה $\varepsilon = 0$ הוא עיגול. הוא דורש קשר מדויק של E ו L^2.

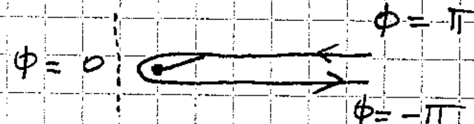
אם ניקח גבול $\varepsilon \to 1$ ביחד עם $a \to \infty$
נקבל פרבולה

(70) $$a(1-\varepsilon^2) = A$$

נקבל המסלול הפרבולי:

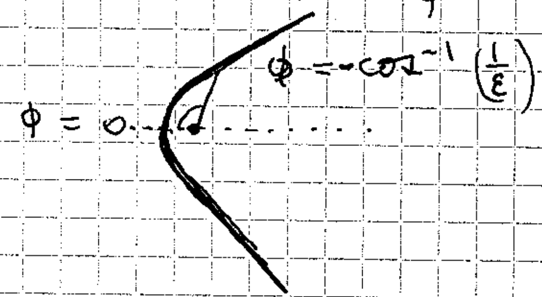
(71) $$r = \frac{A}{1+\cos\phi}$$

שמתאים ל $E=0$. זהו מקרה גבולי בין מערכת קשורה
ללא קשורה.



כאשר ε נעשה גדול מאחד ($E>0$; מערכת לא קשורה
לתנועה) יש לכתוב (64-65) כך:

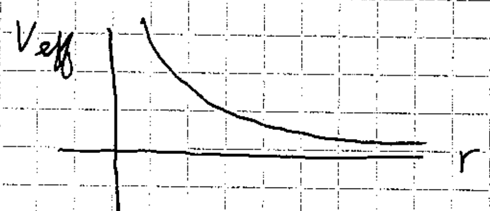
(72) $$r = \frac{|a|(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos\phi} \qquad |a| = \frac{Gm_1m_2}{2E}$$



מסלולים אליפטיים מתאימים לפלנטות. מסלולים פרבוליים
והיפרבוליים מתאימים לשביטים רבים.

נעבור עתה לפוטנציאל האפקטיבי הקולומבי (55).

(73) $$V_{eff} = \frac{Ze_1e_2}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \qquad e_1e_2 > 0$$



יש כאן רק תנועה עם $E>0$. בנוסחאות (65) נחליף

$$-Gm_1m_2 \to Ze_1e_2$$

ונקבל

(74) $$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{Z^2e_1^2e_2^2\mu}} \qquad a = \frac{Ze_1e_2}{2E}$$

המסלול הזה תמיד היפרבולי.

הווקטור של Laplace-Runge-Lenz

ראינו שעבור הפוטנציאל הניוטוני (או הקולומבי עם $e_1e_2<0$)
ניתן לקבל מסלולים סגורים על עצמם בצורה פשוטה.
זה אומר שמצב $\vec{r}_T$ שווה למצב $\vec{r}_0$. דרך אחרת לאמר
זה הוא שנקודת ההתקרבות המרבית בין החלקיקים
אינה נעה עם הזמן כמו בעמ' 39-40, אלא נשארת קבועה.
זה מרמז על קיום בבעית קפלר של עוד קבוע-תנועה
בצורת וקטור המסמן אותה נקודה. רונגה ולנץ מצאו
אותו וקטור.

$$\vec{R} = \vec{v}\times\vec{L} - \frac{Gm_1m_2}{r}\vec{r} \tag{75}$$

כדי לגזור לפי זמן נזכור ש

$$\frac{d}{dt}\vec{r}^2 = 2\vec{r}\cdot\vec{v} \tag{76}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{r}^2} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}$$

ועל כן

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{v}}\times\vec{L} - \frac{Gm_1m_2}{r}\vec{v} + \frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{v}\cdot\vec{r})\vec{r} \tag{77}$$

כאן נזכור

$$\dot{\vec{v}}\times\vec{L} = \dot{\vec{v}}\times(\vec{r}\times\mu\vec{v}) = \mu\vec{r}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}) - \mu\vec{v}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}}) \tag{78}$$

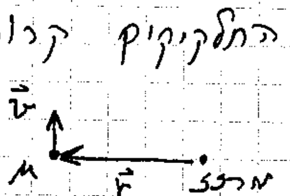
את $\dot{\vec{v}}$ נקח ממשוואת ניוטון

$$\mu\dot{\vec{v}} = -\frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3} \tag{79}$$

והצבה נותנת

$$\dot{\vec{R}} = \cancel{-\frac{Gm_1m_2\vec{r}}{r^3}(\vec{r}\cdot\vec{v})} + \cancel{\frac{Gm_1m_2r^2}{r^3}\vec{v}} - \cancel{\frac{Gm_1m_2}{r}\vec{v}} + \cancel{\frac{Gm_1m_2}{r^3}(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{r}} = 0 \tag{80}$$

אכן יש עוד שמורה - שלא תהיה שמורה עם שינוי הפוטנציאל.
מהו $\vec{R}$? נחשב אותו כאשר החלקיקים קרובים ביותר.



כאן $\vec{L}$ למעלה הדף ולכן
$\vec{v}\times\vec{L}$ הוא לאורך $\vec{r}$
ובעל אורך $v_{min}L$. על כן

$$|\vec{R}| = v_{min}L - Gm_1m_2 = \mu r_{min}v_{min}^2 - Gm_1m_2 \tag{81}$$

אנו מוצאים ש

(82) $$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} \quad ; \quad r_{min} = a(1-e)$$

כמו כן

(83) $$E = \frac{1}{2}\mu v_{min}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r_{min}}$$

שממנו נובע

(84) $$\mu v_{min}^2 r_{min} = 2E r_{min} + 2Gm_1m_2$$
$$= -\frac{Gm_1m_2}{a} r_{min} + 2Gm_1m_2$$
$$= Gm_1m_2(1+\varepsilon)$$

לכן

(85) $$|\vec{R}| = Gm_1m_2(1+\varepsilon) - Gm_1m_2 = Gm_1m_2\,\varepsilon$$

כלומר $|\vec{R}|$ הוא מדד של אקסצנטריות המסלול, כוונו קובע ציר הסימטריה. בעית קפלר למקרה שהמסלול אינו מעגלי יש לה 3 קבועי תנועה. במקרה של מסלול מעגלי $\vec{R}$ נעלם.
בתורת הקוונטים למדו לקשור קיום $\vec{R}$ הקבוע עם סימטריות $O(4)$ של הבעיה הדינמית.

1. האוסצילטור ההרמוני האיזוטרופי

עוד בעיה מעניינת היא זו של פוטנציאל

(86) $$V(r) = \frac{1}{2} k \vec{r}^{\,2}$$

($\vec{r}$ וקטור בין החלקיקים). הדרך נפתור הבעיה בקואורדינטות קרטזיות.

(87) $$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

הסימטריה הכדורית מבטיחה שמור $\vec{L}$ שממנו נובע שהתנועה מתבצעת במישור. נניח, אם כן, לבחור $z=0$. זה מאפשר דרגת חופש אחת. אי תלות הלגרנז'יאן ב t מבטיחה ש

(88) $$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

הינו שמורה. יתרה מזאת, המשתנים x ו- y נפרדים לחלוטין ולכן משוואות התנועה לא באות בכלל מהלוק

(89) $$L_x = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

אי תלות ב t אומרת שיש עוד שמורה

(90) $$E_x = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k y^2$$

באותה מידה גם

(91) $$E_y = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} K z^2$$

שמורה.

ההפרדה ב x היא חד מימדית. עפ"י (12) הפתרון
הוא

(92) $$t = t_0 + \int^{x} \pm \frac{\sqrt{m}\, dx}{\sqrt{2E_x - k x^2}}$$

שינוי משתנה

(93) $$x = \sqrt{\frac{2E_x}{k}} \sin\theta$$

הופך זה ל

(94) $$t = t_0 + \int_0^{\theta} \pm \sqrt{\frac{m}{K}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = t_0 + \sqrt{\frac{m}{K}}\,\theta$$

בשימוש בזוית θ שהסינוס שלו גדל ואז קטן כאשר θ עולה מונוטונית אין צורך לעקוב ~~אחרי~~ אחרי שינוי סימן השורש.

פותרים עבור $\sin\theta$ ומקבלים

(95) $$x = \sqrt{\frac{2E_x}{K}} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,(t-t_0)\right)$$

באנלוגיה גמורה

(96) $$y = \sqrt{\frac{2E_y}{K}} \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,(t-t_1)\right)$$

שתי התנודות הרמוניות עם אותה תדירות $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$
ולכן ישנו מחזור אחד

(97) $$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

המסלול סגור כי המחזורים זהים.

כמובן בחירת ראשית הזמן מאפשרת לקבוע $t_1=0$ ללא הגבלת הכלליות. אז נוכל לכתוב

(98)
$$x = \sqrt{\frac{2E_x}{K}} \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y = \sqrt{\frac{2E_y}{K}} \sin\omega t$$

במקרה הפרטי, $\varphi_0=0$ ברור ש