מכניקה אנליטית (קורס 77303)

מה בין "מכניקה אנליטית" לקורס הראשון במכניקה? האם מדובר בפיזיקה חדשה? לא! למעשה שום דבר אינו תוכן פיזיקלי חדש בקורס זה. חוקי ניוטון כבר כוללים הכל על המכניקה. אך הנסיון של דורות הבהיר שתנועה מכנית מסובכת ניתנת לתאור ולפתרון בשיטות שונות, אחדות מהן יותר יעילות מאלה המבוססות על פתרון ישיר של המשוואה $F=ma$. במקום פתרון קבוצה של משוואות דיפרנציאליות, לעתים הבעיה המסובכת נפתרת ראשית כל בשימוש נבון של סימטריות הבעיה כדי לפשטה.

אולם זה לא העיקר! בזכות הסיגנון שלה והניסוח החדש הכולל המתכונת על עקרונות וריאציה, הקשר בין סימטריה לחוקי שימור ועוד, משמשת המכניקה האנליטית כמוקד לכתיבת הבסיס של שטחים אחרים בפיזיקה. למשל רוב תורת הקוונטים משתמשת במושג ההמילטוניאן השאול מהמכניקה האנליטית, וכמו כן בפיזיקה אחרת שבה מספקת כגון סוגיות [illegible] טכניקות למכניקה האנליטית, ועוד. ועוד דוגמה: בניסוח תורת השדה המשמשת תשתית לפיזיקה של החלקיקים האלמנטריים, שהדינמיקה שלה כל כך מסובכת, משתמשים החוקרים בעקרון הפעולה של המכניקה האנליטית כדי לבנות כוח ומנגנון בתורה את הסימטריות הקודמות של דינמיקה זו. כלומר המכניקה האנליטית הינה מנגנון שמספק אותנו כאשר נכנסים לעומק בפיזיקה חדשה.

I. חזרה על המכניקה הניוטונית

המכניקה של ניוטון מבוססת על שלושה החוקים:

א. חוק ההתמדה - גוף שאינו מושפע ע"י כוחות חיצוניים שומר על מהירותו (כוון וגודל), ובמקרה פרטי גוף במנוחה נשאר במנוחה.

ב. החוק השני - כאשר גוף מושפע ע"י כח חיצוני $\vec{f}$ (וקטורי), התנע שלו $\vec{p}$ משתנה לפי

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \qquad (1)$$

תנע מוגדר כפרופורציוני למהירות הגוף

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (2)$$

והכמות m נקראת המסה - היא מידת כמות החומר.

ג. <u>חוק "פעולה שווה לתגובה"</u> - כאשר שני גופים משפיעים זה על זה אך חופשיים מכח חיצוני, הכוחות הם שווים בגודלם והפוכים בכיוון:

(3) $$\vec{f}_{12} = - \vec{f}_{21}$$

ברור מחוק השני שגוף מבודד שומר על התנע שלו. ברוב הנסיבות מלבד גוף קבוע (אך לא) במקרים כמו זה של קרני רבבת המגנטית חוק ג' שנוסחו מלכתחילה ולכן לכ"כ חוק השני מבטא שבמהירות של גוף מבודד תשמר, כלומר מבטא מחדש את חוק הראשון.

לא רק התנע שמור, כי גם התנע הזוויתי של גוף מבודד שמור. בהתחשב כאלה לתת קואורדינטות הגוף $\vec{r}$ משתנות, ולכן תנע הזוויתי מוגדר לפי

(4) $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

אנו רואים ש

(5) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

כיוון ש-$\vec{p}$ מקביל ל-$\vec{v}$, איבר הראשון מתאפס. אם אין כח פועל על הגוף, $\vec{p}$ שמור, ולכן $\vec{L}$ שמור גם כן!

אנו לומדים ש

<u>חוק שימור תנע</u>: התנע של גוף מבודד שמור.

<u>חוק שימור תנע זוויתי</u>: התנע הזוויתי של גוף מבודד שמור.

לפעמים גם תנע הזוויתי של גוף <u>לא</u> מבודד שמור, וזה כולל, למשל הכוח החשמלי, הנגזרים מפוטנציאל:

(6) $$\vec{f}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} V(\vec{r})$$

כאן V הוא פונקציה של מקום, הפוטנציאל. כח בצורה נקרא משמר (קונסרבטיבי). אם V תלוי רק ב-$|\vec{r}|$ אומרים שהכח הוא כח מרכזי כי

(7) $$\vec{f}(\vec{r}) = -V'(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

מכוון כלפי המרכז (או מהמרכז והלאה). במקרה של כח מרכזי לפי חוק השני (1), $d\vec{p}/dt$ הוא בכיוון $\vec{r}$, ולכן לפי (5)

(8) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

לכן התנע הזוויתי של גוף המושפע מכח מרכזי בלבד נשמר.

עם כל הרקע הזה, נכפול (1) ב $\vec{v}$ סקלרית

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{f} \qquad (9)$$

כעת נניח ש m קבוע שהכח משמר

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}m\vec{v}^2 = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\frac{d}{dt}V(\vec{r}) \qquad (10)$$

או

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + V(\vec{r})\right] = 0 \qquad (11)$$

הכמות $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ נקראת האנרגיה הקינטית. במקרה נתונים פוטנציאל V שממנו נגזר הכח בגוף אנרגיה פוטנציאלית. אז יש לנו, לגבי תנועה בכח משמר

<u>חוק שימור האנרגיה</u>: האנרגיה הקינטית בצירוף האנרגיה הפוטנציאלית של גוף הנע בהשפעת כח משמר הוא כמות שמורה.

מקובל לקרוא לירידה בערך של V כאשר הגוף נע <u>העבודה</u> שנעשתה ע"י הגוף.

בכל הדיון הקודם אנו מתייחסים אל הגוף כאל חלקיק שאין בו חלקים. אך במובן זה בד"כ אידאליזציה. כיצד נטפל במכניקה של גוף מורכב?

ראשית כל נגדיר מסת הגוף וקואורדינטת מרכז המסה:

$$M = \sum_i m_i \qquad \vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \qquad (12)$$

בהמשך נניח שכל ה m_i קבועים ולכן גם M. כעת

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i\sum_j \vec{f}_{ij} + \sum_i F_i^{(e)} \qquad (13)$$

כאן $\vec{P}$ הוא התנע הכולל שהוא סכום ה $m\frac{d\vec{r}}{dt}$ לכל חלקיקי הגוף, $\sum F_i^{(e)}$ הוא הכוח החיצוני הפועל על כלל הגוף, ו $\vec{f}_{ij}$ הוא הכח שחלקיק j מפעיל על חלקיק i.

לאור (3), הסכום על f_{ij} מתאפס כי לכל f_{ij} מופיע גם f_{ji}. לכן לגבי גוף מורכב

(14) $$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = F^{(e)} \equiv \sum_i F_i^{(e)}$$

ז"א אפשר לשכוח מהמורכבות שלו כל עוד קואורדינטת מרכז המסה שלו נחשבת למיקום הגוף. ואם אין כח כולל חיצוני אזי אנו עומדים:

<u>התנע של גוף מורכב, אף מבודד, נשמר, או מהירות מרכז המסה שומרת על ערכה וכוונה.</u>

יש לשים לב שאפשר לכתוב

(15) $$\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$$

① → כעת, נגדיר תנע הזוויתי של גוף מורכב

(16) $$\vec{L} \doteq \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

שלא כמו התנע $\vec{P}$, $\vec{L}$ הזה כן תלוי בבחירת הראשית. כי אם

(17) $$\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\xi}$$

(18) $$\vec{L} \to \vec{L} + \vec{\xi}\times\sum_i p_i = \vec{L} + \vec{\xi}\times\vec{P}$$

כעת נגזור $\vec{L}$ לפי זמן

(19) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i}_{0} + \sum_i \vec{r}_i \times F_i^{(e)} + \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

בסכום הכפול מופיעים זוגות כאלו

(20) $$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}$$

לאור (3) זה מסתכם ב

(21) $$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}$$

אך $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ הוא הווקטור מנקודה j לנקודה i. לכן בתנאי שהכוחות הבין-גופיים הם מרכזיים, הביטוי (21) מתאפס. זה מאפס האיבר האחרון ב(19) ולכן

(22) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times F_i^{(e)} \equiv \tau^{(e)}$$

כאן $\vec{\tau}^{(e)}$ נקרא המומנט של הכח החיצוני. אנו רואים ש:

<u>התנע הזוויתי הכולל של גוף מורכב, ואף מבודד, נשמר. זה בתנאי שכוחות הבין-גופיים הפנימיים הם מרכזיים</u>

נשים לב: במקרה כזה לא נצטרך בהנחה מתאימה על ערכו של $\vec{L}$ בראשית, משום ששימור תנע $\vec{P}$ מבטיח לפי (18) שנגזרתו של $\vec{L}$ לפי זמן אינה תלויה בבחירת הראשית.

בטבע ישנן דוגמאות של כוחות לא מרכזיים, כגון כח המגנטי הפועל על חלקיק טעון. שמירת תנע זוויתי עדיין תקפה שם אבל רק כאשר לוקחים בחשבון את תנע הזוויתי הנישא ע"י השדה האלקטרומגנטי.

נפנה עתה לאנרגיה. באנלוגיה למקרה חד-חלקיקי נדבר על כוחות משמרים כאשר הם נגזרים מפוטנציאל. כך

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i \tilde{V}(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \cdots) \tag{23}$$

נסכים שהכח הפועל מורכב מתרומה חיצונית, ומכח מאת חלקיקי הגוף האחרים.

$$\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij} + F_i^{(e)} \tag{24}$$

כדי לקיים את השלישי, (3), עבור כל זוג חלקיקים, יש הכרח לדרוש ש-V יהיה סכום של פונקציות של ההפרשים $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, כי אז (נשים לב שאין הבחנה בין V_{ij} ו-V_{ji})

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = +\vec{\nabla}_j V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{25}$$

ה-V_{ij} הוא האנרגיה הפוטנציאלית לזוג ij. את $F_i^{(e)}$ יש לגזור מפוטנציאל חיצוני $V_i^{(e)}(\vec{r}_i)$

$$F_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) \equiv -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{(e)}(\vec{r}_i) \tag{26}$$

על כן

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) - \vec{\nabla}_i \sum_i V_i^{(e)}(\vec{r}) \tag{27}$$

כעת ניתן להגדיר האנרגיה הקינטית הכוללת כך:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \tag{28}$$

ואז

$$\frac{dK}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\sum_i \vec{v}_i \cdot \left\{ \vec{\nabla}_i \sum_{j\neq i} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) \right\} \tag{29}$$

ברור ש

$$\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) = \frac{d}{dt} V_i^{(e)}(\vec{r}_i) \tag{30}$$

ומצד שני בסכום הכפול

$$\sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i \sum_{j\neq i} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{31}$$

מופיעים צמדים כמו

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla}_j V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &= (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_{\vec{r}} V_{ij}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{32}$$

כאשר $\vec{r} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$. אך ברור ש

$$\vec{v}_i - \vec{v}_j = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{33}$$

לכן

$$X_{ij} = \frac{d}{dt} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{34}$$

כיוון שבסכום כל זוג כזה מצוג איברים ב X_{ij}, ברור שבסכום ב (29) יופיע רק מחצית מספר האיברים המקוריים כאשר נשתמש בסימון החדש.
לכן

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{d}{dt}\sum_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i\neq j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{35}$$

וכך אומר שיש שמור האנרגיה E כאשר

$$E \equiv K + \sum_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \tag{36}$$

פוטנציאלית יש פקטור 1/2 כדי לא לספור פעמיים האנרגיה השייכת לאינטראקציות בין חלקיקים.

<u>האנרגיה הכוללת של גוף מורכב, אך מבודד, נשמרת בתנאי שהן הכוחות החיצוניים והן הכוחות בין החלקיקים המרכיבים אותו משמרים</u>

כדוגמה של כח חיצוני נותן כח הגרביטציוני. בקרקע הנו

$$\vec{F}^{(e)} = -\vec{g} \tag{37}$$

כאשר $\vec{g}$ הוא וקטור אנכי בחוזק התאוצה הגרביטציונית $980\ cm\ s^{-2}$. לכן

$$V^{(e)}(\vec{r}) = m|\vec{g}|\, z \tag{38}$$

כנ"ל מטען חשמלי ϵ המושפע משדה חשמלי $\vec{E}$ מרגיש כח

$$\vec{F}^{(e)} = \epsilon \vec{E} \tag{39}$$

ולכן

$$V^{(e)}(\vec{r}) = -\epsilon \vec{E}\cdot\vec{r} \tag{40}$$

הן ב-(38) והן ב-(40) ניתן להוסיף קבוע שרירותי.

בשביל מערכת של מסות הפוטנציאל שממנו מגזרים הכחות הגרביטציוניות בין החלקיקים הוא

$$V_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{41}$$

כנ"ל הפוט' החשמלי הקולומבי בין מטענים הוא

$$V_{ij} = \frac{\epsilon_i \epsilon_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{42}$$

אנו נעסוק רק בשטחים נובעים מכחות מרכזיים.

2 →

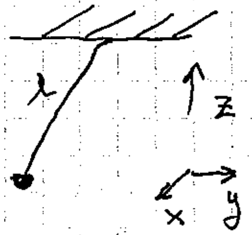
II. מכניקה לגרנג'יונית

א. קואורדינטות מוכללות

עקרונית ממשוואות ניוטון (1.1) לכל חלקיק ניתן להגיע לפתרון כל בעיה במכניקה. למעשה ישנה בעיה בקיום אילוצים. למשל, עגלה שבה ארבעת גלגליה מוגבלות נוסעות על כביש בהשפעת כח גורר. תאור מצב של מצב העגלה ניתן ע"י שלושת הקואורדינטות של מרכז המסה, והזוית בו סובב גלגל מסוים מרגע האפס. אך ארבעת הקואורדינטות האלה לא בלתי תלויות. כל מטר של תזוזת קואורדינטה ה-x של מרכז המסה מתאים בסבוב גלגל בזוית $1/R$ ברדיאנים (R רדיוס הגלגל). לכן יש רק 3 קואורדינטות בלתי תלויות. עקרונית ניתן לכתוב משוואה כמו (1.1)

עבור מרכז המסה, ועוד משוואה כזו עבור זווית הגלגל. אך ברור שבגלל האילוץ שהגלגל לא מחליק אין אפשרות שארבעת המשוואות תהיינה בלתי תלויות, שכן אם זה היה המצב, היו יותר מדי משוואות לבעיה! חוץ מבעיה זו יש לפתרון כזה קשיים בבדיקה כוחות מעבר לאלה הנתונים מראש. למשל יש כח בכוון z המונע מהגלגל לשקוע בקרקע, וכח חכוך המדביק הגלגל לכביש ומונע החלקה וכו'. אלה נקראים כוחות אילוץ ואינם ידועים מראש, רק אחרי פתרון הבעיה. לכן תוכניות המבוססות על פתרון מסודר של משוואות ניוטון בצורתן (1.1) לא יועילו כאן.

עוד דוגמה: מטוטלת בחוט מתוח. מלכתחילה נראה שבעיה תלת-ממדית אם נכתוב 3 משוואות ניוטון עבור x,y,z של המשקולת. אך יש כאן אילוץ שכן אם נבחר הראשית בנקודת התליה



$$(1)\quad x^2+y^2+z^2=l^2$$

לכן רק 2 משוואות ניוטון יכולות להיות בלתי תלויות. בנוסף יש כח אילוץ המונע מהסכום

$$x^2+y^2+z^2$$

לעבור שנוי (הכח הבא מתיחות החוט). שוב אין כח זה נתון מראש - מוצאים אותו רק אחרי פתרון הבעיה.

חלק מהפתרון למכשולים האלה מוכר מזמן, והוא להשתמש בקואורדינטות כדוריות θ,φ במקום x,y,z. θ,φ הן בלתי תלויות ומתארות "דרגות חופש" של המטוטלת. בהקשר שלנו הן "קואורדינטות מוכללות". עדיין נשארת הבעיה, איך כותבים משוואות דינמיות ל-θ ו-φ. המשוואות ניוטון (1.1) התקבלו בתאור דקרטי. בהמשך נדון בשיטה הזו.

האילוץ בדוגמה הקודמת (1) הוא מהסוג הנקרא "אילוץ הולונומי" כלומר של קונפיגורציה, דהיינו משהו שהוא נותן קשר בין קואורדינטות, באופן כללי

$$(2)\quad F(\vec r_1,\vec r_2,\dots,t)=0$$

הוא אילוץ הולונומי. קואורדינטות מוכללות q_1, q_2 וכו' הן כאלה שניתן לכתוב

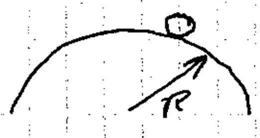
$$(3)\quad \begin{aligned}\vec r_1 &= f_1(q_1,q_2,\dots,t)\\ \vec r_2 &= f_2(q_1,q_2,\dots,t)\\ &\vdots\end{aligned}$$

כך שמצב המערכת מתואר בשלמות ע"י ערכי ה-q. המשוואות הדינמיות צריכות להיות משוואות עבור ה-q. מספר ה-q הדרושות הוא $3N$ פחות מספר האילוצים (N הוא מספר החלקיקים). אין הכרח ש-q יהיה בעל מימד של אורך.

ישנם גם אילוצים אנהולונומיים. למשל, מולקולות גז חייבות להמצאו בתוך מיכל כדורי. ז"א

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \qquad (4)$$

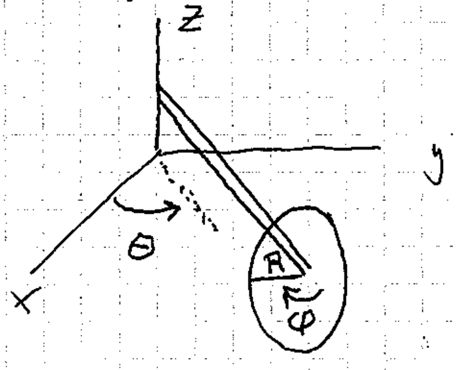
או כדור קטן מתגלגל בלי החלקה על כדור גדול ולבסוף נופל ממנו. כאן האילוץ הוא



$$x^2+y^2+z^2 \ge R^2 \qquad (5)$$

במקרה כזה אי אפשר לבחור קואורדינטות מוכללות לכל תחום התנועה.

אילוץ אנהולונומי מסוג אחר הוא בגלגל הסובב סביב ציר שמאולץ לסובב בעצמו עם קצב קבוע



ברור שמהירות תנועת נקודת המרכז של הגלגל הוא $v=R\dot{\varphi}$ ולכן קואורדינטות המרכז נעות לפי

$$\dot{x} = -v \sin\theta$$
$$\dot{y} = v\cos\theta \qquad (6)$$

ולכן אם נכפיל ב dt נקבל

$$dx + R\sin\theta\, d\varphi = 0 \qquad (7)$$
$$dy - R\cos\theta\, d\varphi = 0$$

האילוץ כאן קובע קשר בין "מהירויות" לא בין קואורדינטות. קשר בין x,y ו- φ נוצר רק לאחר שפותרים את משוואות הדיפרנציאליות (7). פתרון שכמותו הוא בפתרון הבעיה. לכן קשה יותר לפתח תאוריה של כוחות אילוץ אנהולונומיים. במקרה הנ"ל פתרון המשוואות (7) קשה, אך במקרה כללי אי אפשר לבצע זאת. לכן נעסוק במשך הקורס בבעיות הולונומיות שבהן ניתן להגדיר מערכת בלתי תלויה הקואורדינטות המוכללות.

ב. משוואות לגרנז'

נפתח עתה המשוואות הדינמיות עבור הקואורדינטות המוכללות. המשוואות נכתבו בהקשר זה ע"י לגרנז'. שלב הראשון הוא לפרק כוחות אילוץ מכוחות המופעלים ע"י גוף חיצוני.

$$(8) \qquad \vec{f}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i^{(c)}$$

applied = a $\qquad$ constraint = c

לפי שיטה של ז'אק ברנולי וז'אן ד'אלמבר, חשבון על תזוזה קטנה של כל החלקיקים שהיא וירטואלית, כלומר ללא דינמיקה. אנו יודעים שעבור כל חלקיק

$$(9) \qquad \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$$

ולכן

$$(10) \qquad 0 = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i^{(c)} \cdot \delta \vec{r}_i$$

כעת מצטמצמים למקרה שאין כוחות האילוץ מבצעים עבודה, כלומר

$$(11) \qquad \sum_i \vec{f}_i^{(c)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

צריך לציין שזו הנחה. תזוזה וירטואלית חייבת להיות קונסיסטנטית עם כל הכוחות והאילוצים. אם, למשל מדובר בגוף קשיח, האילוצים הם השומרים על המרחק בין כל שני חלקיקי הגוף קבוע. אז ברור שכוחות האילוץ, המבצעים ביצוע האילוץ, אינם עושים עבודה. עוד דוגמה: גלגל מתגלגל על משטח בלי החלקה. יש כח חיכוך שמונע החלקה. אילו היתה החלקה, הכח החיכוך היה עושה עבודה; בהעדר החלקה כח אילוץ זה לא עובד. רוב המקרים בהם אין כחות האילוץ עובדים. ולכן נניח ש-(11) נכונה.

כעת מכיוון ש

$$(12) \qquad r_i = r_i(q_1, q_2 \dots t)$$

$$(13) \qquad \delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

(שומרים על t קבוע כי זוהי התזוזה הוירטואלית). בעזרת זה נוכל לכתוב

$$(14) \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{ij} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{F}_i^{(a)} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

$$Q_j \equiv \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{F}_i^{(a)}$$

זאת נקראת הכח המוכלל המתאים לקואורדינטה q_j, כי

בעבודה הווירטואלית (14) Q_j הוא המקדם של δq_j, אין Q_j חייב במימדים של כח. אם כן

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i - \sum_j Q_j \delta q_j = 0 \tag{15}$$

כעת נעבד את האבר הראשון.

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{ij} m \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{16}$$

$$= \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m\vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j$$

3 →

נתמקד באבר האחרון

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} \tag{17}$$

אך בדרך שלפני כן

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \tag{18}$$

ועל כן

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j} \tag{19}$$

השוואה עם (17) מראה ש

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \tag{20}$$

כמו כן ישירות מ (18) נקבל ש

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{21}$$

נציב במשוואה ב (16) כדי לקבל

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt}\underbrace{\left(m\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)}_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m\vec{v}_i^2\right)} - \underbrace{m\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}}_{\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m\vec{v}_i^2\right)} \right\} \delta q_j \tag{22}$$

ולכן אם נציב ב (15) נקבל

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \qquad (23)$$

ה q_j מספרם כמספר דרגות החופש $3N-$
ובחרנו בלתי תלויות. לכן נוכל לבחור את
ההצגות הווירטואליות δq_j בלתי תלויות. אין דרך
שהסכום (23) יתאפס, אלא אם מקדמי ה δq_j
יתאפסו. ולכן

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j} \qquad (24)$$

אלה משוואות לגרנג'. מספרן כמספר דרגות
החופש במערכת, הן בלתי תלויות. ואין הן כוללות
כוחות אילוץ כי אלה נעלמו מ Q_j. לכן הן פותרות
שתי הבעיות של משוואות ניוטון.

כמובן שאם אין אילוצים אפשר עדיין להשתמש במשוואות
אלה. למשל ניקח q_1 להיות x של חלקיק מסוים i.

$$Q_1 = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial x} \cdot \vec{F}_i^{(a)} = \hat{x} \cdot \vec{F}_i^{(a)} = F_{ix} \qquad (25)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m \vec{v}_i^{\,2}\,; \qquad \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m \vec{v}_i \cdot \hat{x} = m \vec{v}_{ix} \qquad (26)$$

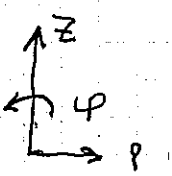
ואין $\partial K/\partial x$. לכן משוואת לגרנג' לקואורדינטה q_1 הוא

$$\frac{d}{dt}(m v_{ix}) = F_{ix} \qquad (27)$$

שהינו בדיוק משוואת ניוטון.

כמו כן ניתן להשתמש במשוואת לגרנג' למציאת
משוואות התנועה בקואורדינטות לא קרטזיות. למשל
ניקח קואורדינטות גליליות. אלמנט האורך בגליל
הוא

$$ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 \qquad (28)$$



ברור ש

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 .$$

ולכן

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) \qquad (29)$$

הכוחות המוכללים הם

(30) $$Q_\rho = \frac{\partial \vec r}{\partial \rho}\cdot \vec F^{(a)} = F_\rho^{(a)} \qquad Q_z = \frac{\partial \vec r}{\partial z}\cdot \vec F^{(a)} = F_z^{(a)}$$

(31) $$Q_\varphi = \frac{\partial \vec r}{\partial \varphi}\cdot \vec F^{(a)} = \rho F_\varphi^{(a)}$$

קל לראות ש- $F_\rho^{(a)}$ ו- $F_z^{(a)}$, $F_\varphi^{(a)}$ הינם בעצם הרכיבים הפיזיקליים
של $\vec F$ בכוון אלה מנקודה. הלוגיקה ש Q_φ שונה מהותית
מאחר ולאו אלא מכפלה מומנט של כח. דרך יותר ועושה
לא תמיד ה- Q_j הינו כח

(32) $$\vec F^{(a)}\cdot d\vec r = F_\rho^{(a)}\, d\rho + F_z^{(a)}\, dz + F_\varphi^{(a)} \rho\, d\varphi$$

זה משום ש

(33) $$d\vec r = d\rho\,\hat\rho + dz\,\hat z + \rho\, d\varphi\,\hat\varphi$$

ולפי (14) זה צריך להיות זהה ל

(34) $$\sum_j Q_j\, \delta q_j = Q_\rho\, d\rho + Q_z\, dz + Q_\varphi\, d\varphi$$

מהשוואה מקבלים (30)-(31) מיד. כעת משוואות לגרנז'
הן

$$\frac{d}{dt}(m\dot\rho) - m\rho\dot\varphi^2 = F_\rho^{(a)} \Rightarrow m(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = F_\rho^{(a)}$$

(35) $$\frac{d}{dt}(m\dot z) = Q_z = F_z^{(a)} \Rightarrow m\ddot z = F_z^{(a)}$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\varphi) = Q_\varphi = \rho F_\varphi^{(a)} \Rightarrow$$

$$m(\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi) = F_\varphi^{(a)}$$

האחרונה, בפרט, קשה לקבלה מתרגום ה משוואות הקרטזיות
/ וגם קשה לקבל אינטואיטיבית.

כעת ניתן דוגמה של משוואות לגרנז' למערכת עם
אילוצים. נניח שחלקיק נע על משטח בעל הצורה

(36) $$z = H(x,y)$$

ללא חיכוך ובהשפעת הכבידה. מהן משוואות לגרנז'?

יש אילוץ אחד, (36), ולכן צריך רק $3-1=2$ משוואות לגרנג' לשתי קואורדינטות מוכללות. כמובן אפשר לבחור $q_1 = x$; $q_2 = y$. עכשיו באנרגיה הקינטית

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

צריך לבטא $\dot{z}$ ע"י $\dot{x}$ ו-$\dot{y}$ לפי הכלל הבא:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} \tag{37}$$

ולכן

$$K = \frac{1}{2} m \left\{ \dot{x}^2\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right] + \dot{y}^2\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] + 2\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\dot{x}\dot{y} \right\} \tag{38}$$

הכח הוא

$$\vec{F}^{(a)} = (0, 0, -g) \tag{39}$$

ולכן

$$Q_1\, dx + Q_2\, dy = -g\, dz = -g\left(\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy\right) \tag{40}$$

ומכאן ש

$$Q_1 = -g\frac{\partial H}{\partial x} \qquad Q_2 = -g\frac{\partial H}{\partial y} \tag{41}$$

אז משוואת לגרנג' ל-$q_1 = x$ הינה

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right] + m\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}\right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + m\dot{x}\dot{y}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\right\} = -mg\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \tag{42}$$

נבצע הנגזרות

$$\begin{aligned} m\Bigg\{&\left[1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right]\ddot{x} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\ddot{y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right]\dot{x}^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]\right]\dot{y}^2 \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right]\dot{x}\dot{y}\Bigg\} = -mg\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \tag{43}$$

ויש משוואה דומה עבור y. גם כאשר נצליח שתהיה לקבל 2 משוואות המתחילות עם $\ddot{x}$ ועם $\ddot{y}$ בנפרד, יהיו איברים עם $\dot{x}^2$ ו-$\dot{y}^2$. אלה נובעים מהאילוצים והם תרומת האילוצים לכוחות המופעלים, $\vec{F}^{(a)}$.

4 $\longrightarrow$

ג. הלגרנג'יאן

כאשר הכוחות $F^{(a)}$ משמרים אפשר לכתוב

$$\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots, t) \tag{44}$$

אם נבחר קואורדינטות מוכללות $\{q_j\}$ הרי ש

$$Q_j = \sum_i F_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \vec{\nabla}_{r_i} V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{45}$$

כאשר בביטוי האחרון רואים V כפונקציה של ה q_j ו- t.
לפי (45) ניתן לכתוב משוואות לגרנג' כך:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{46}$$

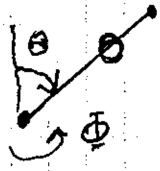
כעת נגדיר הקומבינציה

$$L(\dot{q}_j, q_j, t) = K - V \tag{47}$$

ומכיוון שאין $\dot{q}_j$ מופיע ב V (46) לוקח הצורה

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{48}$$

ה L נקרא הלגרנג'יאן ו (48) הוא הצורה היותר שימושית של משוואות לגרנג'. כדוגמה של שימוש בלגרנג'יאן נגדיר שיש לנו חרוז המושחל על מוט ישר שקצהו קבוע ב $r=0$ אך כוונו משתנה לפי החוק



$$\theta = \Theta(t) \qquad \varphi = \Phi(t)$$

השאלה: כיצד נע החרוז לאורך המוט בלי חכוך.
הפוטנציאל כאן הוא (38)

$$V = mgr\cos\Theta \tag{49}$$

כי הרי הגובה הוא $r\cos\Theta$. לכן

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\Phi}^2) - mgr\cos\Theta \tag{50}$$

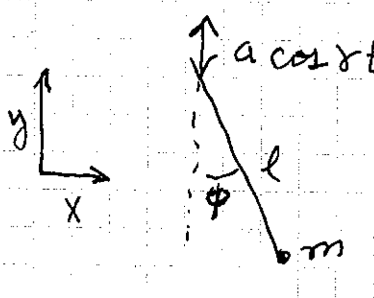
ה r הוא קואורדינטה מוכללת היחידה. לכן

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - (mr\dot{\Theta}^2 + mr\sin^2\Theta\,\dot{\Phi}^2 - mg\cos\Theta) = 0 \tag{51}$$

או

(52) $$\ddot{r} = \underbrace{-\,g\cos\Theta(t)}_{\text{כח גרביטציוני}} + \underbrace{r\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\,\dot{\Phi}^2\right)}_{\text{כח צנטריפוגלי}}$$

עוד דוגמה: מטוטלת של מסה m במישור בעל אורך l שנקודת התליה שלו נעה מעלה מטה לפי החוק



(53) $$y = a\cos\gamma t$$

האנרגיה הפוטנציאלית היא

(54) $$V = mg\,(a\cos\gamma t - l\cos\varphi)$$

כי גובה המסה m הוא הסכום בפשטות. ברור שמהירות המסה בכוון y היא

(55) $$v_y = -a\gamma\sin\gamma t + l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$
$$v_x = l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

האחרון כי הרי הקואורדינטה x היא $l\sin\varphi$. עם כל זה

(56) $$L = \tfrac{1}{2}m\left\{(l\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (l\sin\varphi\,\dot{\varphi} - a\gamma\sin\gamma t)^2\right\} - mg\,(a\cos\gamma t - l\cos\varphi)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\left\{l^2\dot{\varphi}^2 - 2a\gamma l\sin\gamma t\sin\varphi\,\dot{\varphi} + a^2\gamma^2\sin^2\gamma t\right\} + mgl\cos\varphi - mga\cos\gamma t$$

כיוון שבמשוואות לגרנז' לוקחים $\partial L/\partial\varphi$ ו- $\partial L/\partial\dot{\varphi}$ אפשר לא לכלול בלגרנז'יאן

$$\tfrac{1}{2}ma^2\gamma^2\sin^2\gamma t - mga\cos\gamma t$$

כיוון שהללו לא תורמים למשוואות התנועה. המשוואה היא

(57) $$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi} - ma\gamma l\sin\gamma t\sin\varphi\right) + mgl\sin\varphi + ma\gamma l\sin\gamma t\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = 0$$

כלומר

(58) $$\ddot{\varphi} - \frac{\gamma^2 a}{l}\cos\gamma t\sin\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

ז. עקרון הפעולה המינימלית

נתרכז בתנועה עם דרגת חופש אחת ולכן מתוארת ע"י קואורדינטה מוכללת אחת q. כמו כן נתרכז במקרה של כח משמר. נתבונן בכמות

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt \qquad (59)$$

הנקראת "פעולה". יש לה מימדים של אנרגיה כפול זמן. לא רק שניתן לחשב הפעולה עבור המסלול הנתון ע"י משוואות לגרנז' - ניתן גם לקחת כל מסלול $q(t)$, גם לא פיסיקאלי - ולחשב S עבורו. S, אם כן, היא פונקציונל של מסלול, ו- t_1 ו- t_2.

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt \qquad (60)$$

שים לב, הפעולה היא תלויה במסלול. נשאלת השאלה, עבור איזה מסלול בין הנקודה q_1 ב t_1 והנקודה q_2 ב t_2 יש ל- S ערך קיצוני? אם יש מסלול כזה,

$$q = q_0(t),$$

הרי שלגבי מסלול קרוב אליו $q = q_0(t) + \delta q(t)$

$$\delta S = S[q_0(t)+\delta q(t)] - S[q_0(t)] = 0 \qquad (61)$$

לסדר ראשון ב $\delta q(t)$ שיכולה להיות שרירותית כל עוד $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

ברור ש

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_0+\delta q, \dot q_0+\delta q, t) - L(q_0,\dot q_0,t)\right] dt$$

$$\cong \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}(q_0,\dot q_0,t)\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q_0,\dot q_0,t)\,\delta \dot q\right] dt \qquad (62)$$

נשאלת השאלה, מה זה $\delta\dot q$? כדוגמה ניקח $\delta q = \varepsilon\eta(t)$ כאשר ε מספר קטן ו $\eta(t)$ פונקציה כלשהי המתאפסת ב t_1 ו t_2. ברור ש

$$\delta\dot q = \varepsilon\dot\eta(t) = \frac{d}{dt}\delta q \qquad (63)$$

ברור מיד שתמיד ניתן לכתוב זה: הוריאציה δ והנגזרת $\frac{d}{dt}$ הן חלופיות. נוכל אם כן לבצע אינטגרציה לפי חלקים

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta\dot q\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\frac{d\,\delta q}{dt}\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt \qquad (64)$$

ולכן

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right]\delta q\,dt \qquad (65)$$

5 →

כיוון שאנו משווים מסלולים שמתחילים באותה נקודה ומסתיימים באותה נקודה δq מתאפס בקצוות והאיבר הראשון נופל.

אנו רואים שאם ניקח q_0 כמסלול המקיים משוואות לגרנז' $\delta S = 0$, כלומר עבור מסלול כזה הפעולה היא אקסטרמלית.

להיפך, אם נדרוש שהפעולה תהיה אקסטרמלית, הרי שהאינטגרל ב-(65) חייב להתאפס. כיוון ש-δq נבחר להיות כל פונקציה, זה דורש קיום משוואות לגרנז'. אם כן מצאנו העקרון:

<u>עקרון הפעולה המינימלית</u>: המסלול הפיזיקלי של מערכת ~~משוואת~~ הוא הוא מסלול שעבורו הפעולה היא אקסטרמלית.

בעקרון בצורה כזו כבר נלקחה בחשבון העובדה שההכללה תקפה גם עבור הרבה קואורדינטות מוכללות - תתקבלנה משוואות לגרנז' עבור כל אחת ואחת בנפרד היות והן בלתי תלויות.

יש לשים לב להבדל בין זה לגישה הניוטונית. בגישה הניוטונית התנועה נקבעת כאשר נתונים הקואורדינטות והמהירויות שלהן בתחילת התנועה. בגישה של עקרון הפעולה המינימלית התנועה נקבעת כאשר קובעים הקואורדינטות בתחילת התנועה ובסופה ולא ע"י משוואה דיפרנציאלית כי אם ע"י עקרון וריאציה.

עקרון וריאציה ראשון - והקשר של משוואות דומות ל-(48) שלו ניתן ע"י המתמטיקאי אוילר. העקרון בנוסח במכניקה ע"י דה מופרטויס ולאחר מכן ע"י המילטון. במאה האחרונה הוכר עקרון הפעולה המינימלית כעקרון הראשוני הקודם למשוואות התנועה. בגלל זה הוא תופס מקום נכבד בתחומים חדשים בפיזיקה.

ה. <u>סימטריות מרחב וזמן והלגרנז'יאן</u>

הצורה (47) של הלגרנז'יאן הוכתבה ע"י משוואות ניוטון. כיצד נוכל לנסות לפתח חלק ממנו רק מתוך עקרון הפעולה המינימלית?

ראשית כל נציין דבר חשוב: מבחינת התנועה הפיזיקלית אין הלגרנז'יאן נקבע אלא עד כדי נגזרת מדויקת בזמן. כי נניח שמוסיפים ללגרנז'יאן המלא נגזרת

$$L(q,\dot q,t) \rightarrow L(q,\dot q,t) + \frac{d}{dt} f(q,t) \qquad (66)$$

ויוצא ש

(67) $$S \to S + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)$$

כאשר נבצע הואריאציה אזי $q(t_1)$ ו- $q(t_2)$ מתאפסים, ולכן האיברים הנוספים לא תורמים מאומה. מותר, איפוא, להוסיף ללגרנז'יאן נגזרת לפי הזמן של כל פונקציה של קואורדינטות וזמן.

כעת נתמקד בחלקיק חופשי (אין כוחות) ונשאל איזה מן הקריטריונים הראשוניים אפשר לנחש הלגרנז'יאן שלו. נעבוד ב-3 ממדים ובלי אילוצים.

בעקרון $L = L(\vec r, \vec v, t)$. אבל איך יתכן שתהיה תלות ב-$\vec r$? תראינה משוואות לגרנז' שונות במקומות שונים במרחב, כלומר והיו כוחות. לכן אנו חייבים לוותר על התלות ב-$\vec r$. זה נובע מההנחה ב<u>הומוגניות</u> המרחב. באותה מידה אנו מניחים שהזמן הומוגני. אחרת התלות של L ב-t תהיה שונה באופיה בזמנים שונים ואין סיבה כזו לכך. לכן נשמיט גם t. במובן אין כל פסול שגם $\vec r$ וגם t יופיעו בתוך הגורם

(68) $$\frac{d}{dt} f(\vec r, t)$$

שמותר להוסיף ללגרנז'יאן.

נשארנו עם $L = L(\vec v)$. אך $\vec v$ הוא וקטור ו-L הוא פונקציה (סקלר) בודדת נוצלה אותה. מ-$\vec v$ אפשר ליצור מספר אחד בשתי דרכים. אחת היא לקחת

$$\vec a \cdot \vec v$$

כאשר $\vec a$ הוא וקטור קבוע. השניה היא לקחת $\vec v^2$. אי אפשר שתהיה תלות L ב-$\vec a \cdot \vec v$ כיוון שהוא בסתירה עם <u>איזוטרופיות</u> המרחב - $\vec a$ משמש ככיוון מועדף. לכן נשארנו עם

(69) $$L = L(\vec v^2)$$

מהי הפונקציה L? נמצא אותה בעזרת אינבריאנטיות גלילאית. גלילאו מצא שנוסחת המכניקה שקולה במערכות ואפס השונות במהירותיהן בתנאי שאלה הן מערכות אינרציאליות. במערכת אינרציאלית מתקיים החוק הראשון של ניוטון (למעשה הוגדרה ע"י גאליליאו עצמו). אז נדרוש שאותן משוואות הלגרנז'יאן לחלקיק שמהירותו $\vec v$ במערכת הראשונה ו- $\vec v'$ בשניה. אם מערכת השניה נעה לגבי הראשונה במהירות $\vec V$ הרי ש

(70) $$\vec v = \vec v' + \vec V$$

ולכן

(71) $$L(\vec v^2) = L(\vec v'^2 + 2\vec V \cdot \vec v' + \vec V^2)$$

זה כללי, ונכון בפרט כאשר $\vec V$ אינפיניטסימלי. באותו

מקרה

(72) $$L(\vec{v}^2) = L(\vec{v}'^2) + 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}'^2}(\vec{v}'^2)\,\vec{V}\cdot\vec{v}' + O(\vec{V}^2)$$

כיוון ש $\vec{V}$ קבוע אפשר לכתוב נכון לסדר $O(\vec{V})$

(73) $$L(\vec{v}^2) = L(\vec{v}'^2) + 2\frac{\partial L}{\partial \vec{v}'^2}\frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\vec{r}')$$

נראה כאילו הלגרנג'יין שונה בשתי המערכות, משהו האומר שאין מתקיימת אינווריאנטיות גלילאו. אך אם

(74) $$\frac{\partial L(\vec{v}'^2)}{\partial \vec{v}'^2} = \text{const.}$$

ההפרש בין הלגרנג'יינים הוא בדיוק מה שנדרש (68) שלא משנה את תנועת הפיזיקה. אם כן יש לדרוש (74) כלומר

(75) $$L(\vec{v}^2) = \text{const.}\times\vec{v}^2$$

לכן עבור חלקיק חופשי הלגרנג'יין חייב להיות פרופורציוני למהירות בריבוע. בסכם קבוע הפרופורציה הוא חצי מסת החלקיק.

כאשר החלקיק מושפע מכוחות אין כבר הגיון לטעון שאופי ה L יהיה תלוי ב $\vec{r}$, ואם הכוחות תלויים בזמן אין מנוס מלהוסיף תלות L ב t. אך מבחינת פשטות ניתן לטעון שמספיק לתקן צורת הלגרנג'יין כך

(76) $$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - V(\vec{r},t)$$

כאשר V הוא פונקציה כלשהי. הנסיון מראה שאלה בדרך משהו יותר מספק.

אם יש כמה חלקיקים המושפעים מכוחות חיצוניים, מסתבר שיש לסכם הלגרנג'יינים האינדיבידואליים

(77) $$L = \sum_i\left\{\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 - V_i(\vec{r}_i,t)\right\}$$

בסכימה מבטיחה שאין אינטרקציה בין תנועות החלקיקים השונים: כל משוואה מנותקת מהאחרות.

מה אם מדובר על שני חלקיקים שעושים אינטרקציה ביניהם אך אינם מושפעים מכוחות חיצוניים? לפי המודל (77) נכתוב כאן

(78) $$L = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$$

אבל זה לא הכל. הזזת שני החלקיקים כאחד לא
צריך לשנות בפיסיקה שכן המרחב הוא הומוגני
ואין על החלקיקים השפעות מבחוץ. כמו כן
בגלל איזוטרופיות המרחב לא צריך לשנות
לפיסיקה אם מסובבים את מערכת החלקיקים
באופן קשיח. שני הטיעונים מכתיבים שהאנרגיה
לקחת

(79) $$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, t)$$

כי בבסיס $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ הוא היחיד שלא משתנה תחת הזזה וסיבוב.

זה דיון פשוט לפה בפועל הלגרנג'יאן להרבה חלקיקים המשפיעים אחד על השני רק בינוניהם (בדרך כלל אין תלות V בזמן)

(80) $$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

אם יש גם כוחות חיצוניים סביר להוסיף לזה $\sum V_i(\vec{r}_i)$. משוואות לגרנז' הנגזרות מ L המוכלל הזה הן בדיוק (I.27)

(G) →

כוחות שאינם משמרים

אם חלק מהכוחות המופעלים $\vec{F}^{(a)}$ הם לא משמרים נכתוב

(81) $$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_i^{(c)} + \vec{F}_i^{(nc)}$$

נמצא את $Q^{(c)}_j$ ואת $Q_j^{(nc)}$ בשיטה הרגילה. את $Q_j^{(c)}$ ניתן לגזור מאנרגיה פוטנציאלית V בדומה ל (45), ולכן נוכל לכתוב את משוואות לגרנז'

(82) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)}$$

כאשר $L = K - V$ כרגיל.

הדוגמה המוכרת היא כאשר הכח $\vec{F}_i^{(nc)}$ פרופורציוני למהירות $\vec{v}_i$ (כמו בגוף הנע בתוך נוזל):

(83) $$\vec{F}_i^{(nc)} = -\alpha_i \vec{v}_i$$

אז

(84) $$Q_j^{(nc)} = \sum_i \vec{F}_i^{(nc)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i^{nc} \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\sum_i \alpha_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathcal{F}$$

(85) $$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i \vec{v}_i^2$$

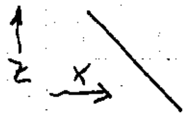
כאן השתמשנו ב (21). הפונקציה $\mathcal{F}$ נקראת פונקצית הדיסיפציה של ריילי (Rayleigh). בעזרתה משוואות התנועה הן

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \tag{86}$$

המשמעות הפיסיקלית של $\mathcal{F}$ הוא ש $2\mathcal{F}$ הוא קצב אבדן אנרגיה של המערכת שעולה לכחות הלא משמרים. כי הרי

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_i \alpha \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = -2\mathcal{F} \tag{87}$$

כדוגמה נדון בתנועה של חרוז המשתחל בתיל בעל הנטיה



$$z = kx$$

כאשר כל המתקן נמצא בתוך מיכל ובשדה כבידה g. הלגרנז'יאן הוא

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{k^2} \dot{z}^2 - mgz \tag{88}$$

ופונקצית רויילי הוא

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \alpha \left(\dot{z}^2 + \frac{\dot{z}^2}{k^2} \right) \tag{89}$$

בשתי אלה בחרנו z כקואורדינטה מוכללת. משוואות לגרנז' הינן

$$\frac{d}{dt}\left(m\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \dot{z} \right) + mg = -\alpha \left(1+\frac{1}{k^2}\right) \dot{z} \tag{90}$$

כלומר

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{g k^2}{1+k^2} = 0 \tag{91}$$

זאת מראה התחלשות הכח הגרביטציוני בפקטור $k^2/(1+k^2)$ כתוצאה מנטיית התיל, וכח החיכוך הוא במקדם α/m.

הכח האלקטרומגנטי גם כן לא משמר. זה קורה כאשר השדה משתנה בזמן, שאז בהכרח ישנו שדה מגנטי. לגבי החלק המשמר של השדה ברור שהלגרנז'יאן של חלקיק טעון מטען e צריך להיות

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\Phi \tag{92}$$

כאשר Φ הפוטנציאל החשמלי. שדה מגנטי $\vec{B}$

מוסיף כח לורנץ $\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}$. בפיסיקה הקלאסית כידוע ניתן לגזור $\vec{B}$ והשדה החשמלי $\vec{E}$ מ ϕ ופוטנציאל וקטורי $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{93}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

אפשר לראות שתחת "שנוי הכיול"

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \tag{94}$$
$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

אין $\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ משתנים - תהיה Λ כל פונקציה שנרצה. זה אומר שיש משפחה שלמה של פוטנציאלים המתאימים לאותה פיסיקה.

כיון שעלינו לתקן הלגרנז'יאן (92) כדי לקחת בחשבון האפקט של $\vec{B}$ לשם החלק $-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ של $\vec{E}$ בתנועת החלקיק יש למצוא תוספת מ $\vec{A}$, $\vec{r}$ ו- $\vec{v}$ בצירוף קבועים כגון e ו- m. מכל התוספות האפשריות תנסה מהצורה

$$k\vec{A}\cdot\vec{v}$$

מוכרחת כיוון שתחת שנוי הכיול (94)

$$k\vec{A}\cdot\vec{v} \to k\vec{A}\cdot\vec{v} + k\vec{\nabla}\Lambda\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{95}$$

בו בזמן

$$e\phi \to e\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{96}$$

לכן אם נבחר

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\phi + k\vec{A}\cdot\vec{v} \tag{97}$$

אזי שנוי הוא

$$L \to L + \frac{e}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + k\vec{\nabla}\Lambda\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{98}$$

עם הבחירה $k = e/c$ התוספת היא פשוט $\frac{e}{c}\frac{d\Lambda}{dt}$ ואנו יודעים שזאת לא תשפיע על התנועה (משוואות). כל תוספת שונה ל L לא תענה מבחן זה. לכן משיקולים של סימטריה כולל

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} \tag{99}$$