הרצאה 2 - וקטורים

- מוטיבציה והגדרת וקטור
- חבור, כפל בסקלר
- דוגמאות
- מכפלה סקלרית
  - הגדרה
  - תכונות
  - דוגמאות ותרגילים
- מכפלה וקטורית
  - הגדרה
  - תכונות
  - דוגמאות ותרגילים

- מוטיבציה - רמה דוגמאות

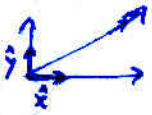
<u>הגדרה</u> (לא פורמלית)

שני הנתונים הבאים שקולים

1. וקטור הוא חץ בעל אורך וכיוון
2. וקטור הוא סדרה של (3) מספרים מתאימים $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

השקילות היא מכיוון שבהינתן חץ ניתן למצוא את הקואורדינטות

הקרטזיות שלו - למשל ב 2d



$\equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

הערה: הגדרה (1) היא "לא מה יפה" והגדרה (2) "לא מה שאלי", מהבחינה כי היא רומזת אחראי לגיאומטריה ובפרט כולל בתוך שהמה השאלה אחראי לשדה, מספרים בבנוי לא המשלו בין המרחבים.

הגדרה (1) מתאימה למהות הוקטור והגדרה (2) מתאימה לבנוי יישומים, והמאבר בין שני נקי התבל מאפשר להבין בדיוק אלגוריתם בהגדרה]

הגדרה (2) $\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$ סדרת המספרים נקראת "רכיבי הוקטור" במע' הצירים הנתונה, ונוכל למצוא אותם אי השלמה לחילופין בהינתן מערכת צירים, רכיבי הוקטור מגדירים את הוקטור. רכיבי הוקטור שונים בכל הגדרה אל מערכת צירים.

$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ — יחידה, כל הקלה

— דוגמאות

מכפלה בין וקטורים

מכפלה סקלרית $\vec{A}\cdot\vec{B}$

הגדרה: מכפלה סקלרית $\vec{A}\cdot\vec{B}$ נתנת ע"י אחת מהדרכים

השקולות הבאות

1. $|A|\cdot|B|\cos\theta$

2. $\sum_{i=1}^{3} A_i B_i$

הוכחת השקילות בין הגדרה 1.

$\Leftarrow$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = |A|\cdot$ (ההטל של $\vec{B}$ בכיוון $\vec{A}$)

ולכל (ההטל של $\vec{B}_1+\vec{B}_2$) = (ההטל של $\vec{B}_1$) + (ההטל של $\vec{B}_2$)

(ההטל של $\beta\vec{B}$) = β(ההטל של $\vec{B}$)

$\Leftarrow$ $\vec{A}\cdot(\alpha\vec{B}_1+\beta\vec{B}_2) = \alpha\,\vec{A}\cdot\vec{B}_1+\beta\,\vec{A}\cdot\vec{B}_2$ (*) כלי הגדרה 1 מקיימת פלוס (הגדרה 2 מקיימת אותו דבר)

יהי $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$

$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$

$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$

$0 = \hat{x}\cdot\hat{y} = \dots$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) =$

$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ מש.ל.

(*) פלוס בהשוואה לשני $(\alpha\vec{A}_1+\beta\vec{A}_2)\cdot\vec{B} = \alpha\vec{A}_1\cdot\vec{B}+\beta\vec{A}_2\cdot\vec{B}$

ניתן לקבל מהגדרה 1 מהגדרה

מכפלה וקטורית $\vec{A}\times\vec{B}$

שתי הגדרות האות אלו:

(1) $|A||B|\sin\theta$ בכיוון המאונך למישור הנפרש ע"י $\vec{A},\vec{B}$

ושונה בהתאם לחוק היד הימנית (מנוסה).

(2) $\vec{A}\times\vec{B} = (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} + (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y}$

הוכחת הדרישות:

שם נלך שהגדרה 1, נראה פלוס, נמצא מכפלה וקטורית דרך

וקטורי בסיס ונקבל את 2:

נמצא שגודל $\vec{A}\times\vec{B}$ $\quad \vec{A}\times\vec{B} = |A||B|\sin\theta = \vec{A}\times\vec{B}_\perp$

$\vec{B}_\perp$ = הטלת B על המאונך ל $\vec{A}$

$= |A|$ ($\vec{A}$ כפול $\vec{B}_\perp$ כפול $90°$ סיבוב)

לכן, גם

$\Leftarrow$ $\vec{A}\times(\vec{B}_1+\vec{B}_2) = |\vec{A}|$ ($(B_1+B_2)_\perp$ כפול $90°$ סיבוב)

$= |A|$ ($B_{1\perp} + B_{2\perp}$ כפול $90°$ סיבוב) =

$= |A|\left[(B_{1\perp}$ כפול $90°$ סיבוב$) + (B_{2\perp}$ כפול $90°$ סיבוב$)\right] = \vec{A}\times\vec{B}_1 + \vec{A}\times\vec{B}_2$

באותו דרך כי $\vec{A}\times(\beta\vec{B}) = |A|$ ($(\beta\vec{B})_\perp$ כפול $90°$ סיבוב) =

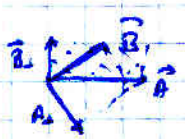
$= |A|$ ($\beta B_\perp$ כפול $90°$ סיבוב) =

$= |A|\,\beta$ ($B_\perp$ כפול $90°$ סיבוב) $= \beta\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

בסה"כ $\vec{A}\times(\alpha\vec{B}_1+\beta\vec{B}_2) = \alpha\vec{A}\times\vec{B}_1 + \beta\vec{A}\times\vec{B}_2$

- פלוס בשמאל יש $(\alpha\vec{A}_1+\beta\vec{A}_2)\times\vec{B} = \alpha\vec{A}_1\times\vec{B} + \beta\vec{A}_2\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ מתבטא זו תוצאה סימטרית $(\alpha\vec{A}_1+\beta\vec{A}_2)\times\vec{B} = -\vec{B}\times(\alpha\vec{A}_1+\beta\vec{A}_2) =$



אז מהגדרה ($\vec{A}_\perp$ סיבוב ב -90° של $\vec{B}$) $\vec{A}\times\vec{B} = |B|$.

לאחר שהראינו כלים נשאר את הטבלה הקלאית של וקטורי היחידה:

$$\hat{x}\times\hat{x} = 0$$

(שלישר ימני) $$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{x}\times\hat{z} = -\hat{z}\times\hat{x} = -\hat{y}$$

וכן $$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$

ואם

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})\times(B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}) =$$

$$= (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z} + (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y}$$

מ.ל.ש.