חוק שימור 2

אנרגיה וכ"ו

משוואת תנועה כללית

$$m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t)$$

לדוגמה $F = F(x)$ מצב נפרד

נכפיל את המשוואה ב- $\dot{x}$:

$$= m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x} =$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \qquad = -\frac{d}{dt}V(x)$$

כלומר $\boxed{F(x) = -\frac{dV}{dx}}$ V - אנרגיה פוטנציאלית

לאחר אינטגרציה

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = const = E}$$

אנרגיה קינטית $K = \frac{1}{2}mv^2$

אנרגיה פוטנציאלית

אנרגיה כוללת קבועה לאורך התנועה - אבן שמור.

- אנרגיה היא סקלר בגלל שהיא וקטור
- יחידות

$$= [K] = [\tfrac{1}{2}mv^2] = M L^2 T^{-2}$$

$$= [V] = [F\cdot dx] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

ב MKS היחידה היא $kg\, m^2 s^{-2} \equiv 1\, J$ Joule

ב cgs $gr\, cm^2 s^{-2} \equiv 1\, erg$ (ארג ≡ ergon)

James Prescott Joule 1818-1889 אנגלי חבר ושותר אנרגיה

המרה:

$$1\, J = kg\, m^2 s^{-2} = 10^3\, gr\, \frac{(10^2 cm)^2}{s^2} = 10^7\, gr\, cm^2 s^{-2} = 10^7\, erg$$

(*)

- ביחד עם האנרגיה נראה אבולם שמורים אלינם מאוד - משלמאד יחסות נראה שהם קרובים מאוד בעולם והינם רבים של וקטור אחד.

(*) יחידה נוספת קלוריה $1\, c \equiv 4.2\, J$ כדי להעלות 1 גר' מים ב $1^\circ c$ (לא $4^\circ c$).

"קלוריה" של אוכל היא קילו קלוריה $10^3 c$

הערות

- $K \geq 0$

- V שינוי בגלל קבוע $V \to V + V_0$ לא

מצב הטבע. E - לא תלוי בזה. המקרים מסוימים

נמצא בכך לבדוק לקבוע קבוע כך.

דוגמא

כוח על כדור

$$\uparrow z \qquad \vec{F} = -mg\,\hat{z}$$

$$F = -\frac{dV}{dz}$$

$$\boxed{V = mgz \equiv mgh}$$

הוכח כי הגדרה הפוטנציאלית הבדידות קבוע לאחר הגדרת $z=0$.

* הדגמה: בפרוקה כלפי מעלה אנרגיה קינטית מתחילה הפוטנציאלית, ולהיפוך בנפילה.

פתרון בעיות

המקרים הרבים נתן לבנות בעיות בעזרת אנרגיה ⇓ בדרכים בחלופין.

המקרה כפי פתרון אנרגיה בדרך פשוט יותר.

לדוגמא: אבן זרקה $v_0 = 0$ מגובה מגדל קבוע h. מה

תנאי מהירות הפגיעה?

* לפי כוחות

$$a = -g$$

$$v = -gt + 0$$

$$z(t_f) = -h \quad , \quad z = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = g^2 t_f^2 = 2gh \quad \Leftarrow$$

* לפי אנרגיה

$$E_i = E_f$$

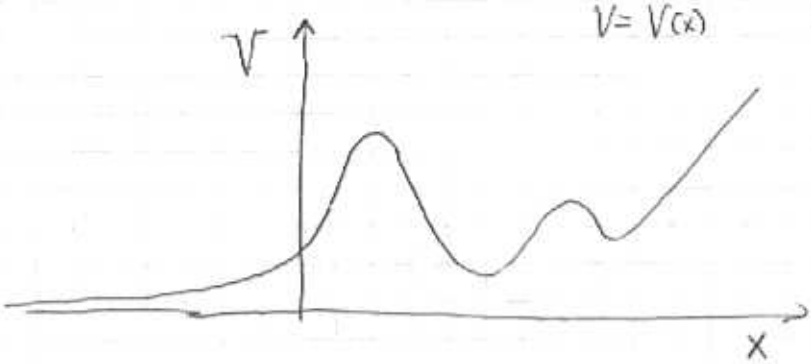
$$0 = \quad = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$\frac{1}{2}v^2 = gh \quad \Leftarrow$$

פתרון כללי ב-1d

משוואה $m\ddot{x} = F(x)$

בהשפעת פוטנציאל כללי $V = V(x)$



- הכוח $F = -\frac{dV}{dx}$ הוא "גרדיאנט" V.
- x_0 הוא נק. שווי משקל, כאשר $F(x_0) = 0 \iff$ equilibrium
  x_0 נק. קריטית של V: $V' = 0$.
- סוג שווי משקל לפי גודל $V''(x_0) > 0$ stable

  $V''(x_0) < 0$ רופף

  $V(x) = const$ אדיש

(פיתוח V סביב x_0:

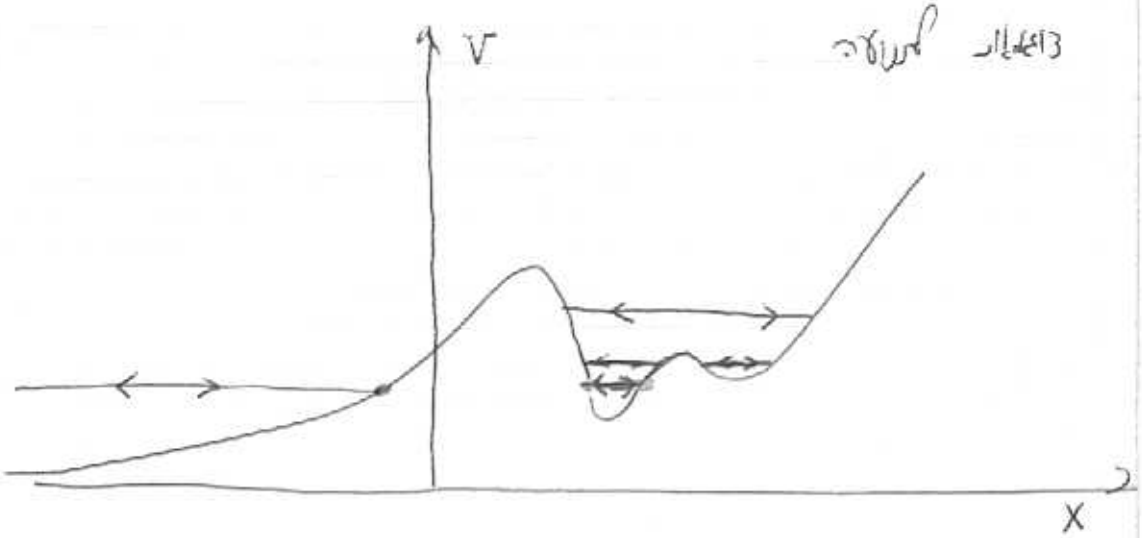
$$V = V_0 + \cancel{V'(x-x_0)} + \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

(מקרה כללי)

x_1 turning point בהינתן E ניתן להגדיר נק. מפנה

$V(x_1) = E \Rightarrow K = 0 \Rightarrow v = 0$.

דוגמאות לתנועה



שאלה בחלק שאר אינטגרה

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

הגדרה: <u>סדר</u> של משוואה כלשהי הוא הנגזרת הגדולה ביותר המופיעה בה.

לדוגמה, משוואת הגל היא מסדר שני כיוון שמופיע גם הנגזרת $\ddot{x}$.

<u>הגדרה</u>: מס' חופשי הדרגתי = סדר המשוואה.

הסדר - הם $x^{(n)}$ $\left(\equiv \frac{d^n x}{dt^n}\right)$ אפשרי המשוואה אז אנו מוכרחים לדעת את $x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}$, ואז המשוואה תקבע את $x^{(n)}$ והמשך הדינמיקה ידוע.

מס' חופשי הדרגתי = מס' פרמטרים בפתרון כללי $x = x(t; p_1, p_2)$

שימוש האינטגרה מעלה משוואה מסדר 2 המשוואה זה סדר ראשון + קבוע (חופשי הדרגתי) E.

נבודד את $\dot{x}$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

נלמד שיטה לפתרון <u>משוואה דיפרנציאלית מסדר 1</u> נקרא מסוים "נתונים להפרדה / פריקות".

משוואה כללית $\dot{x} = f(x,t)$

אם $f(x,t) = f(t)$

אז פתרון האינטגרה $x = \int f\, dt$

אם $\boxed{f(x,t) = f_1(x) f_2(t)}$ - "משוואה נתונה להפרדה / פריקה"

אז $\frac{dx}{dt} = f_1(x) f_2(t)$

$$\frac{dx}{f_1(x)} = f_2(t)dt$$

כעת ניתן לבצע אינטגרציה על שני הצדדים

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{f_1(\tilde{x})} = \int_{t_0}^{t} f_2(\tilde{t})d\tilde{t}$$

כיון שהגבולות המתאימים נתונים רק בהמשך (בין x_1 ל x)

ניתן גם לכתוב

$$\int^{x} \frac{d\tilde{x}}{f_1(\tilde{x})} = \int^{t} f_2(\tilde{t})d\tilde{t} + const$$

הפרמטר / תנאי התחלה

<u>דרך נוספת</u>

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}$$

$$\boxed{\int^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-V(\tilde{x})\right]}} = \int^{t} d\tilde{t} = t}$$

כמו "בעבר" - עדיין הבקבוק על מישור הגרף הפסיכולוגי לוגיקה.

בעזרת כיון שיכולנו $t = t(x)$ עכשיו אולי לפנינו

אבל $x = x(t)$ - בדיר הלגרנג'י

<u>בדוגמאות</u> (1) אבור $V = const \cdot x = mg \cdot x$

נקבל

$$t = \int^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - mg\tilde{x}\right]}} = (-g)\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - gx\right)} - const$$

$$\frac{1}{2}\left(\underset{\underset{v_0}{\parallel}}{const} - gt\right)^2 = \frac{E}{m} - g \cdot x$$

(2) יהיה $V = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$

ש.מ. x_0

$F = -V' = -k(x-x_0)$ – כוח אלסטי של קפיץ

נפיק בהתאם הקירוב.

פיתוח

$$t = \int^{\tilde{x}} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{1}{2}k\tilde{x}^2\right]}}$$

$$\frac{1}{2}k\tilde{x}^2 \to E\tilde{y}^2$$

כלומר

$$\tilde{y} = \sqrt{\frac{k}{2E}}\,\tilde{x}$$

$$d\tilde{y} = \sqrt{\frac{k}{2E}}\,d\tilde{x}$$

$$= \int^{\tilde{y}} \sqrt{\frac{m}{2E}\frac{2E}{k}}\,\frac{d\tilde{y}}{\sqrt{1-\tilde{y}^2}} = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\tilde{y} - \text{const} =$$

$\omega^2 = k/m$

$$\Rightarrow \sin(\omega t - \text{const}) = y = \sqrt{\frac{k}{2E}}\,x$$

$\omega\cdot\text{const} = \text{const}$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\,\sin(\omega t - \text{const})$$

//