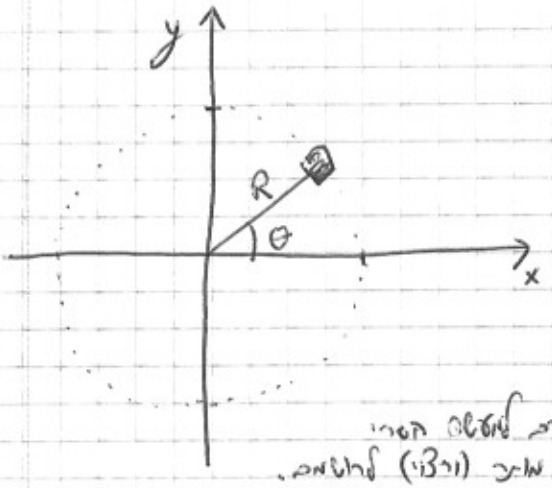
תנועה מחזורית ומעגלית בכיר (קינמטיקה 4)

- קינמטיקה קטבית
- מס' בכיר קוטבית
- מס' בכיר ב 3d

דוגמאות לתנועה מחזורית

- אבן קשורה בחבל
- גלגל
- הירח
- אלקטרון

תאר מצבי הקואורדינטות קטבית



רדיוס R

הזווית $\theta = \omega t$

ω - תדירות זוויתית

$[\omega] =$ רד'/שנ'

* תדירות רד' הם למעשה חסרי יחידות, לא מוגדר (ורדיו) לחלוטין.

תדירות $f := \omega / 2\pi$

Hz = cycles per sec. $\equiv$ cps = מח'/שנ' $= [f]$

Rounds per Min. $\equiv$ RPM = מח'/דק'

$T := 1/f$ זמן מחזור

לגל, מתח של חשמל

Heinrich Rudolf Hertz 1857-1894 גרמני

הראה את קיומם של גלים אלקטרומגנטיים (1888).

המשלוח

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y} =$$
$$= R\cos\omega t\,\hat{x} + R\sin\omega t\,\hat{y}$$

הנקודה

$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t} = R$$

המהירות

$$\vec{v}(t) = -\omega R\sin\omega t\,\hat{x} + \omega R\cos\omega t\,\hat{y}$$

$$|\vec{v}| = \omega R$$

יחידות

$$[\omega R] = T^{-1}L \stackrel{\checkmark}{=} [v]$$

כאן

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = -\omega R^2\cos\omega t\sin\omega t + \omega R^2\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

$\Leftarrow$ $\vec{v}\perp\vec{r}$ המהירות משיקית

האוצה

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\omega t\,\hat{x} - \omega^2 R\sin\omega t\,\hat{y} =$$
$$= -\omega^2\,\vec{r}(t)$$

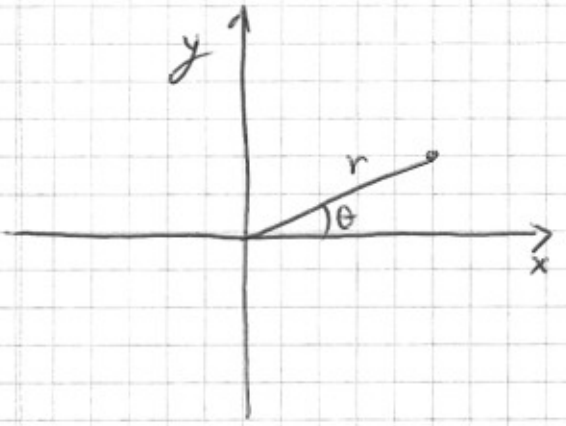
$$|\vec{a}| = \omega^2 R$$ $\Leftarrow$

ומכאן גם המרכז.

<u>הערה:</u> למרות ש ω קבוע גם $|\vec{v}|$ הרי <u>שוקלר המהירות $\vec{v}$</u> אינו קבוע ולכן האוצה אינה אפס.

מ' קוטבי

שאם כאשר יש נקודה מישור בשרטוט אותה נקבע במישור בדיוק: פלוס עד סביב הראשון במישור.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

לעומת. הפוך

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = tg^{-1} y/x \end{cases}$$

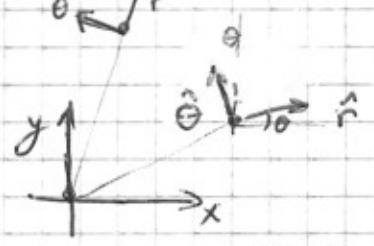
הבעיה: איך בדיוק

$$\theta = \begin{cases} tg^{-1}(y/x) & y>0 \\ tg^{-1}(y/x)+\pi & y<0 \end{cases}$$

בהנחה $0 \le tg^{-1} y/x \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$.

בכל נק' ניתן להגדיר מערכת וקטורי יחידה אורתוגונלית (מ' אורתוגונלית)



$$\hat r := \cos\theta\,\hat x + \sin\theta\,\hat y$$
$$\hat\theta := -\sin\theta\,\hat x + \cos\theta\,\hat y$$

$\hat x, \hat y$ בדיוק בכל נק' בדומה ל $\hat r, \hat\theta$ מאונכים

$|\hat r| = |\hat\theta| = 1 \qquad \hat r\cdot\hat\theta = 0 \Rightarrow \hat r \perp \hat\theta$

נגזרות

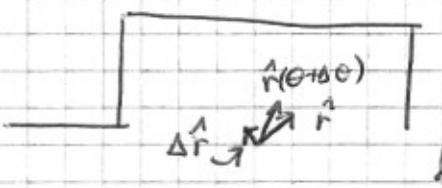
נניח שמתקיים $\theta = \theta(t)$

אז

$$\frac{d}{dt}\hat r = -\dot\theta\sin\theta\,\hat x + \dot\theta\cos\theta\,\hat y = \dot\theta\,\hat\theta$$

(הוכחה: $\hat r \cdot \hat r = 1$)

$$\frac{d}{dt}\hat\theta = -\dot\theta\,\hat r$$



הדגמה אלמנטרית של

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}\hat r = \hat\theta \\ \frac{d}{d\theta}\hat\theta = -\hat r \end{cases}$$

+

סימון לתנועה מעגלית

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \omega R\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R\,\hat{r}$$

תאור כללי בקואורד. קוטביות

$$\vec{r} = r(t)\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} =$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

(מרכז) בקוטב יחידות - לכל הגדרות יחידות LT^{-2} בדומה.
- נלמד בקורס אלה לאיך משתמשים ב"מאמרים מסובכים".

* הרחבה

כלל השרשרת/נגזרת פונקציה הסימונים שונים.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta)$$

$$\theta = \theta(t)$$

ביחד $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta(t))$

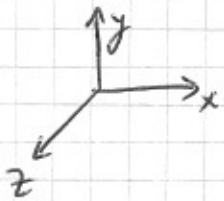
סימון גוטן מקובל $\left(\hat{\theta}(\theta(t))\right)' = \hat{\theta}' \cdot \theta'$ ← נגזרת פונקציה

סימון בו השתמשנו עד כה

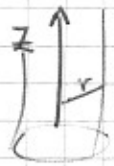
$$\frac{d}{dt}\hat{\theta} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

"$d\theta$ מצמצם".

מערכות קואורדינטות ב-3d



* **קרטזית** (x, y, z)



* **גלילית**

$(r, \theta) \leftrightarrow (x, y)$ כמו בקוטבי

המשטחים $r=const$ הם גלילים.

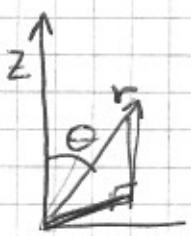
* **כדורית**

r - מרחק מהראשית

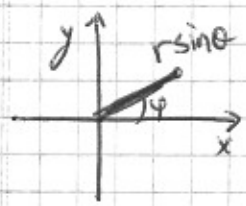
θ - "קו רוחב" $\theta=0$ קוטב צפוני

$\theta=\pi$ קוטב דרומי

φ קו אורך $\varphi \sim \varphi+2\pi$



$$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ x = r\sin\theta \cos\varphi \\ y = r\sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$



הפוך

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$\varphi = tg^{-1} y/x$$

שאלה (אופציונלי): מטוס נבלע לולאה רחבה. L מאוץ $\approx$ 340 מ/ש

ברדיוס $R=$ מ'. מהו מאוצו?

פתרון:

$$a = \omega^2 R \qquad v = \omega R \Rightarrow a = \left(\frac{v}{R}\right)^2 R = v^2/R$$

$$\boxed{a = 57.8\ m/s^2 = 5.9\ g}$$

נלקח מאוצ

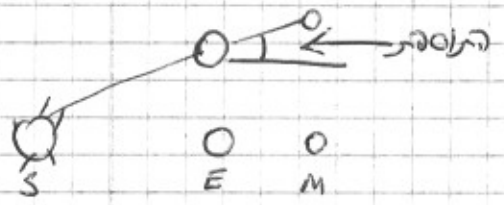
בדוגמא

מאוץ הרח סביב כדו'.

$$a = \omega^2 R$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ אם ω נמצא מתוך זמן המחזור

אנו נוסיף מחזור של חודש = 29.5 יום



אבל בזמן הזה הרח נע מחוצה אל 3

לשמש

מקומות $\left(1+\frac{29.5}{365}\right) \simeq 1.08$

לפיכך זמן המחזור האמיתי של הרח

$$T' = \frac{29.5}{1.08} = 27.3\,d$$

$$1\,d = 24 \cdot 3600\,s = 86{,}400\,s$$

$$\omega = 2.66 \cdot 10^{-6}\ rad/s$$ ⇐

המרחק מכדור הארץ (מרכז לשמש) ל 3 הרח

$$R_{ME} = 3.8 \cdot 10^8\,m$$

(רדיוס כדור הארץ הוא $R_E = 6.4 \cdot 10^6\,m$

מאחר ורחק הרחק מתוך לקוי לבנה ב $R_{ME} \simeq 60\,R_E$).

הסיבה

$$a = \omega^2 R \simeq 2.7\ mm/s^2 \simeq g/3600.$$

(לעב בוק $\frac{g}{3.6} \cdot 10^{-3}$ כדי להבדיל מ הספרות המשמעותיות).