שיעור 2 : חשבון אינדקסים האלגברה מרובה משתנים - מבוא מוטיבציה

היתרון של המכניקה האנליטית בא לידי ביטוי בחקר המערכות מרובות גופים, או ליתר דיוק מרובות דרגות חופש. בקורס נעסוק במכניקה מרובת משתנים. בשנה ג' למדנו אלגברה ועשינו חשבון אינפיניטסימלי מרובה משתנים. השיעור חשבון אינדקסים שימושי מא'ד.

נתחיל בדוגמאות ומהן נתקדם להכללות.

דוגמא I "נגזרת לפי הזמן"

נתונה פונק' מרובת משתנים

$$f = f(x^1, \dots, x^n) = f(\{x^i\}_{i=1}^{n})$$

כאשר i הוא אינדקס עליון ולא חזקה (כאשר יש מקום לבלבול בין חזקה לאינדקס עליון נציין את המשמעות במפורש).

סימון לרשימה

$$\underline{\{x^i\}_{i=1}^{n} \overset{\text{הגדרה}}{:=} (x^1, \dots, x^n)} .$$

פרוש פיזיקלי - x^i הוא מיקום החלקיק i על ציר ה-x.
f היא פונק' התלויה במיקום החלקיקים - למשל הפוטנציאל.
נתון מסלול של המערכת כלומר $x^i = x^i(t)$ לכל i
נגדיר, הזמן לפי

$$\tilde{f}(t) := f(\{x^i(t)\}) .$$

אזי

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\dot{x}^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + \dots \frac{\partial f}{\partial x^n}\dot{x}^n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}}_{f \text{ גרדיאנט}} \underbrace{\dot{x}^i}_{\text{מהירות}}$$

אגף ימין הוא מכפלה סקלרית של הגרדיאנט של f במהירות.
נוח להשמיט את סימן הסכימה ולרשום

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot{x}^i$$

זהו מוסכמת הסכימה (של איינשטיין) - אינדקס החוזר פעמיים פירושו סכימה, ואין צורך לכתוב $\sum_i$ במפורש.

* דוגמא II כפל מטריצות.

בסימון הרגיל כפל של מטריצה על וקטור נראה כך

$$[u] = [M][v]$$

בעזרת אינדקסים ניתן לרשום זאת כך

$$u^1 = M^1{}_1 v^1 + M^1{}_2 v^2 + \dots$$

$$u^i = \sum_{j=1}^{n} M^i{}_j v^j \underset{\text{מוסכמת הסכימה}}{\equiv} M^i{}_j v^j$$

באופן דומה כפל מטריצות

$$(A\cdot B)^i{}_j = \sum_k A^i{}_k B^k{}_j \equiv A^i{}_k B^k{}_j$$

* לסיכום: מוסכמת הסכימה של איינשטיין

$$\boxed{A^i B_i := \sum_{i=1}^{n} A^i B_i}$$

- סוכמים על כל אינדקס המופיע פעמיים בביטוי. טווח הסכימה (1,...,n) אינו מפורש אלא מובן מההקשר. אינדקס כזה נקרא אינדקס סכימה או דמה. summation/dummy index
- אינדקס המופיע פעם יחידה ייקרא אינדקס חופשי, לא סוכמים עליו והביטוי תלוי בו.
- אסור הופעה של אינדקס יותר מפעמיים, או יש לציין אז במפורש האם לסכום.

בדוגמא $u^i = M^i{}_j v^j$

j הוא אינדקס סכימה / דמה.

i הוא אינדקס חופשי.

הגדרה: אינדקס עליון תחתון

ברשימות אילו אסמן חלק מהאינדקסים כעליונים וחלק כתחתונים. הדבר חסר חשיבות בקורס זה ומומלץ להתעלם ממנו. בעיקרון ניתן היה להשתמש באינדקסים תחתונים בלבד. ואולם ההרגלים של הכתיבה והחוש האסתטי יגרמו לחלק מהאינדקסים להיות עליונים, כפי שאולי תלמדו מאוחר יותר במסגרת החשבון הטנזורי.

<u>תבניות ריבועיות</u> (נשתמש באינדקסים) יישום אשר ישמש אותנו בהמשך

הגדרה $T(\{v^i\}) = \frac{1}{2} m_{ij} v^i v^j = \frac{1}{2}\left[m_{11} v^1 v^1 + m_{12} v^1 v^2 + \dots\right]$

כאשר $m_{ij} = m_{ji}$ סימטרית

תבנית ריבועית משמע ש

$$T(\lambda v) = \lambda^2 T(v) \qquad v = \{v^i\}_{i=1}^{n}$$

גזירה

$$\frac{\partial}{\partial v^k} T(v) = \frac{\partial}{\partial v^k}\left(\frac{1}{2} m_{ij} v^i v^j\right)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial v^k} = \delta^i_k := \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

δ^i_k - הדלתא של קרונקר

Leopold Kronecker 1823-1891

מתמטיקאי יהודי גרמני (התנצר בשנותיו האחרונות)

מתקיים

$$\delta^i_k v^k = \sum_{k=1}^{n} \delta^i_k v^k = v^i$$

לכן

$$\frac{\partial}{\partial v^k} T(v) = \frac{\partial}{\partial v^k}\left(\frac{1}{2} m_{ij} v^i v^j\right) = \frac{1}{2} m_{ij}\left(\delta^i_k v^j + v^i \delta^j_k\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_{kj} v^j + \frac{1}{2} m_{ik} v^i = m_{ki} v^i$$

השוואה

$$\frac{\partial}{\partial v}(v^2) = \frac{\partial}{\partial v}(v \cdot v) = 1 \cdot v + v \cdot 1 = 2v$$

טנזור ε לוי-צ'יויטה (Levi-Civita)

Tullio Levi-Civita 1873-1941

מתמטיקאי איטלקי-יהודי, ממייסדי חשבון הטנזורים

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{(ijk)} = (1\,2\,3), (2\,3\,1), (3\,1\,2) \\ -1 & \\ 0 & \end{cases}$$

1 — i, j, k בסדר מעגלי עולה, $(ijk) = (1\,2\,3), (2\,3\,1), (3\,1\,2)$

-1 — " בסדר מעגלי הפוך

0 — אחרת

שימוש מרכזי

$$(A \times B)^i = \varepsilon_{ijk} A^j B^k$$

למשל

$$(A \times B)^1 = \varepsilon_{1jk} A^j B^k = A^2 B^3 - A^3 B^2$$

מקיים

$$\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$$

ניתן לבדוק בכל המקרים השונים של i,j,k,l,m ולהוכיח הזהות הבאה:

ניתן לחשב (תרגיל)

$A \cdot (B \times C)$

$A \times (B \times C)$

$\| A \times B \|^2$

$(A \times B) \cdot (C \times D)$

$$\frac{\partial}{\partial v^i}\, a_{jkl}\, v^j v^k v^l$$