תזכורת על מכניקה ניוטונית

לקראת הניסוח הלגרנז'יאני הניסוח הקודם, לכן **ניסוח ניוטוני**

- קינמטיקה: מסלולו של גוף נתון ע"י

$$\boxed{\vec r = \vec r(t) \qquad \vec r = x\hat x + y\hat y + z\hat z}$$

- דינמיקה

חוק שני של ניוטון $\boxed{\frac{d\vec p}{dt} \equiv m\ddot{\vec r} = \vec F}$

כאשר $\vec F$ הוא שקול הכוחות $\vec F = \sum \vec F_i$

כוחות שונים הפועלים על הגוף,

אנו נדרשים להשתמש בהגדרות כמותיות לכל אחד על מנת למצוא את $\vec F$.

חוקי שימור

* תנע קווי $\vec P := \sum_a m_a \vec v_a$ נשמר בהעדר כוחות חיצוניים, $\frac{d}{dt}\vec P = 0$ — Linear momentum

אינדקס החלקיק

זהו חוק הפעולה והתגובה (חוק שלישי של ניוטון).

מרכז המסה $\vec R_{cm} := \frac{1}{M}\sum m_a \vec r_a$ עם המהירות הקשורה $\vec P = M\dot{\vec R}_{cm}$.

* תנע זוויתי $\vec L := \sum_a \vec r_a \times (m_a \vec v_a)$ נשמר בהעדר מומנטים חיצוניים - שוב הוא החוק השלישי. $\frac{d}{dt}\vec L = 0$. — Angular momentum

הגדרת $\vec L$ דורשת לבחור ראשית צירים.

* אנרגיה - כאשר כל הכוחות משמרים, כלומר נגזרים מפוטנציאל V באופן הבא — Energy

$$\vec F_a = -\vec\nabla_a V \equiv -\frac{\partial}{\partial x_a}V\,\hat x - \frac{\partial}{\partial y_a}V\,\hat y - \frac{\partial}{\partial z_a}V\,\hat z$$

אזי $E = T + V \equiv \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2 + V$ שמורה. $\frac{d}{dt}E = 0$.

חוקי התנועה של ניוטון

I (התמדה) גוף מבודד (אין פועלים עליו כוחות) ינוע במהירות קבועה.

II $\vec{F} = m\vec{a}$ - התאוצה של גוף נקבעת ע"י מסתו ושקול הכוחות עליו.

III (פעולה ותגובה) אם גוף 1 מפעיל על גוף 2 כח $\vec{F}_{1\to 2}$

אזי

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$

הערה מצו - הפעולה מרחוק הכוחות יהיו לאורך הקו המחבר בין הגופים.

מערכות יסוד 1

statics — סטטיקה — $\sum \vec{F} = 0$

free fall — נפילה חופשית: תנועה בתאוצה קבועה $\vec{a} = \vec{g}$.

circular motion — תנועה מעגלית

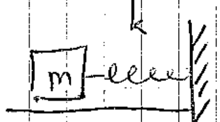
מהירות זוויתית $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T - זמן מחזור

מהירות קווית $v = \omega R$ R רדיוס המעגל
$\vec{v}$ בכיוון משיקי

$a = \omega^2 R$ $\vec{a}$ בכיוון רדיאלי פנימה.

מערכות יסוד 2

מתנד, כל מערכת ליד שווי-משקל, אולי צפוי.



oscillator — מתנד 3

$$m\ddot{x} = -kx$$

כח מחזיר - אנטיפרופ' להסטה-קטנה
סביב שווי משקל יציב.
k הוא קבוע הקפיץ.

פתרון כללי ⇐

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t$$

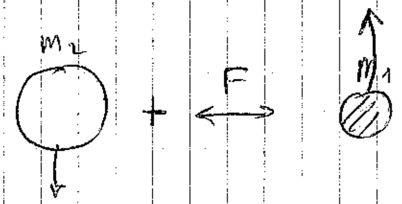
A משרעת Amplitude

φ פאזה/זווית מופע phase

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

A, φ נקבעים מתנאי ההתחלה (או באופן שקול A_1, A_2)

חוקי קפלר



שני גופים הנעים בהשפעת
של כח הכבידה ההדדי בלבד

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$r = |\vec r_{12}| = |\vec r_1 - \vec r_2|$$

שלב ראשון

הבעיה הדו-גופית Two body problem

שני גופים m_1, m_2 הנעים בהשפעה של כח הדדי בלבד
(לאו דווקא כבידה).

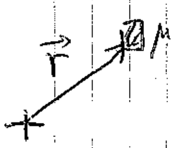
$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec r}_1 = \vec F_{2\to1} \\ m_2 \ddot{\vec r}_2 = \vec F_{1\to2} \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt}\dot{\vec R}_{cm} = 0 \\ \mu \ddot{\vec r} = \vec F(\vec r) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} r_1 = \vec R_{cm} + \frac{m_2}{M}\vec r \\ r_2 = \vec R_{cm} - \frac{m_1}{M}\vec r \\ M := m_1 + m_2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \vec R_{cm} := \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec r_1 + m_2 \vec r_2\right) \\ \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 \\ \mu := \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \\ \vec F = \vec F_{2\to1} \end{cases}$$

כאשר מרכז המסה center of mass
הקואור. היחסית
המסה המצומצמת reduced mass

כלומר מרכז המסה נע בקו ישר ונשארה הבעיה המצומצמת:
מסה יחידה μ נעה בהשפעה של כח $\vec F(\vec r)$
כאשר $\vec r$ נמדד ממקום קבוע



שלב שני: הדיון כוח מרכזי Central force

עפ"י החוק השלישי הכח פועל בקו המחבר את שני הגופים, ולכן הכח בבעיה המצומצמת הינו בכוון המרכז

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{r}$$

כאשר הכח $F(r)$ כללי (לאו דווקא כבידה).

עוברים לקואורדינטות קוטביות r, θ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

שימור תנע זוויתי $L = \mu r^2 \dot{\theta} = const$

משוואת כוח בכוון הרדיאלי

$$\mu\underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{\text{תאוצה רדיאלית בקואורדינטות קוטביות}} = F(r)$$

תאוצה

נציב $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$

$$\Leftarrow \quad \mu\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{\mu r^3}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} V_{eff}(r)$$

כאשר הפוטנציאל האפקטיבי מוגדר ע"י

$$\boxed{V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}}$$

Effective potential

"פוטנציאל צנטריפוגלי".

שלב שלישי ואחרון **בעיית קפלר** Kepler problem

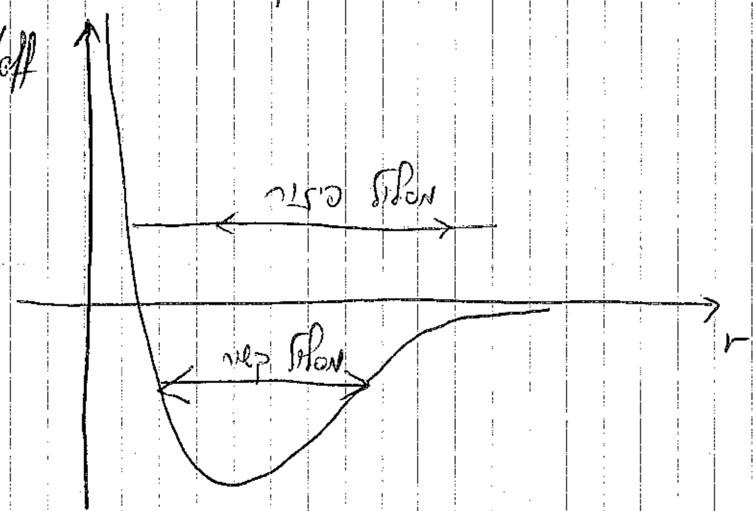
$$F(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \equiv -\frac{G\mu M}{r^2}$$

ולכן

$$V(r) = -\frac{G\mu M}{r}$$

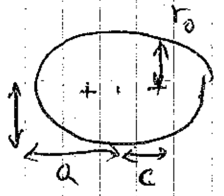
הפוטנציאל האפקטיבי

$$V_{eff}(r) = -\frac{G\mu M}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$



המסלולים נתונים ע"י חתכי קונוס (אליפסה, היפרבולה ופרבולה)

$r = r(\theta)$



$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 + e\cos\theta\right)}$$

e - אקסצנטריות eccentricity

$e = 0$ מעגל

$0 < e < 1$ אליפסה

$e = 1$ פרבולה

$e > 1$ היפרבולה

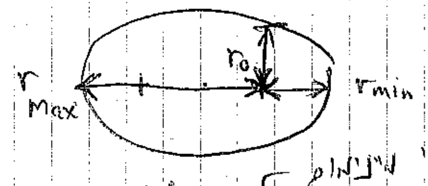
עמ' 8-7 פרוט נוסף
קורס מכניקה אנליטית

קשרים בין הצגות הפרמטרים בבעיית קפלר

- L, E פרמטרים פיזקליים: אנרגיה ותנע זוויתי.
נוח יותר לעבוד עם גדלים ליחידת מסה

$$\begin{cases} \tilde{L} := L/\mu \\ \tilde{E} := E/\mu \end{cases}$$

- הפרמטרים הגאומטריים r_0, e



ע' מינימום של V_{eff}

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{\tilde{L}^2}{GM} \\ \left(\dfrac{e}{r_0}\right)^2 = 1 + \dfrac{2\tilde{E}}{\tilde{L}^2} \end{cases}$$

- ע' r_{min}, r_{max} - פריאסטרון ואפואסטרון

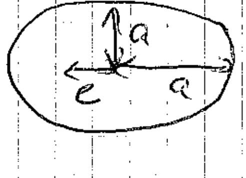
apastron
periastron

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}(1 + e\cos\theta)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_{max}} = \dfrac{1}{r_0}(1-e) \\ \dfrac{1}{r_{min}} = \dfrac{1}{r_0}(1+e) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{r_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_{min}} + \dfrac{1}{r_{max}}\right) \\ \dfrac{e}{r_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_{min}} - \dfrac{1}{r_{max}}\right) \end{cases} \Leftarrow$$

- תת צי גדול ותת צי קטן

Semi major/minor axis



$$a = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) \Rightarrow \quad a = \frac{r_0}{1-e^2}$$

$$c = ea \Rightarrow \quad c = \frac{e}{1-e^2} r_0$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}$$

קשרים נוספים:

* האנרגיה וזמן המחזור תלויים רק ב a:

$$E \leftrightarrow a \leftrightarrow \omega$$

$$\boxed{E = E(a) = -\frac{GM\mu}{2a}}$$

$GM = \omega^2 a^3$ $\omega = \omega(A)$ חוק III קפלר

* שטחים שווים בזמן שווה - חוק II קפלר

$$\frac{1}{2}\tilde{l} = \frac{dS}{dt} = \frac{S}{T} = \frac{\omega S}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{l} = \omega a b = \omega \frac{r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}}}$$

גוף צפיד - סביב ציר קבוע

תנע זויתי (ספין) $\qquad S = \omega I$

כאשר מומנט ההתמד $\qquad$ Moment of inertia

$$I = \int dm\, \rho^2 \equiv \sum_a m_a \rho_a^2$$

ρ - המרחק מהציר

אנרגיה קינטית - $\qquad T = \frac{1}{2} I \omega^2$

מש. תנועה $\qquad \frac{d}{dt} L \equiv \frac{d}{dt}(I\omega) = N$

מומנט $\qquad$ torque .