המשפט הויריאלי

המשפט הויריאלי מקשר בין האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת והאנרגיה הקינטית הממוצעת באופן כללי, עבור מערכת עם הרבה חלקיקים:

* משוואות התנועה עבור החלקיק i, $\quad \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \vec{F}_i$

* נסתכל כעת על הגודל: $\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i$. הנגזרת של גודל זה לפי הזמן היא:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\cdot\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{p}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}}$$

איבר זה במקרה הלא יחסותי הוא: $2K \equiv \sum_i m_i v_i^2$

$\|$

נסתכל כעת על צד שמאל של המשוואה:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i r_i^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2}$$

I הוא מומנט האינרציה הסקלרי של המערכת (ה-Tr של טנזור האינרציה).

סה"כ, נקבל:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}_{\equiv \text{"Virial of Clausius"}}$$

נקרא הויריאל של Clausius.

עבור קונפיגורציות סטטיות, מומנט האינרציה אינו משתנה בזמן ולכן:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}$$

במקרה שהחלקיקים הם חלק מגז אידיאלי שמתנגשים נקודתית התרומה של ההתנגשויות לסכום היא אפס (לשני החלקיקים המתנגשים $\vec{r}_i$ זהה ו- $\vec{F}_i$ מנוגד).

זהו המשפט הויריאלי.

דוגמא לשימוש במשפט הויריאל: גז בתוך קופסא:

נסתכל על גז בתוך כלי בנפח V. הכוחות שנכנסים לוויריאל הם הכוחות הפנימיים בין החלקיקים והכוח מדפנות הקופסא. עבור הכוח החיצוני, מתקבל:

$$\sum_{\text{pressure}} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \int_{\text{surface}} (-P)\, d\vec{S} \cdot \vec{r} = -P \int_S \vec{r} \cdot \hat{n}\, dS \underset{\text{משפט גאוס}}{=} -P \int_V (\nabla \cdot \vec{r})\, dV$$

$$= -P \cdot 3V$$

הכוחות בין החלקיקים, לזוגות זוגות, ניתנים לכתיבה כך:

$$\sum_i F_i r_i = \sum_{\text{pairs}} (F_{ij} r_i + F_{ji} r_j) = \sum_{\text{pairs}} F_{ij} (r_i - r_j)$$

ולכן המשפט הויריאלי נותן:

$$K = \frac{3}{2} PV - \frac{1}{2} \sum_{\text{pairs}} F_{ij} \cdot (r_i - r_j)$$

* במקרה של גז אידיאלי, ההתנגשויות הן מקומיות ואיבר הכוח הפנימי מתאפס. ומקבלים את משוואת המצב של גז אידיאלי מונואטומי:

$$K = \frac{3}{2} PV$$

* חלקיקים עם משיכה גרביטציונית:

במקרה זה:

$$F_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{(r_{ij})^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

כך שאם נכפיל ב- $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ נקבל:

$$K = -\frac{1}{2} \sum_{\text{pairs}} F_{ij} (r_i - r_j) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\text{pairs}} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}}_{(-\Omega)} = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{G m(r)}{r}\, dm$$

$(-\Omega)$ – אנרגיה פוטנציאלית כוללת של הכוכב

$$K = -\frac{\Omega}{2}$$

* האנרגיה הקינטית (התרמית) של החלקיקים המרכיבים את הכוכב שווה לחצי הערך האבסולוטי של האנרגיה הפוטנציאלית של הכוכב.

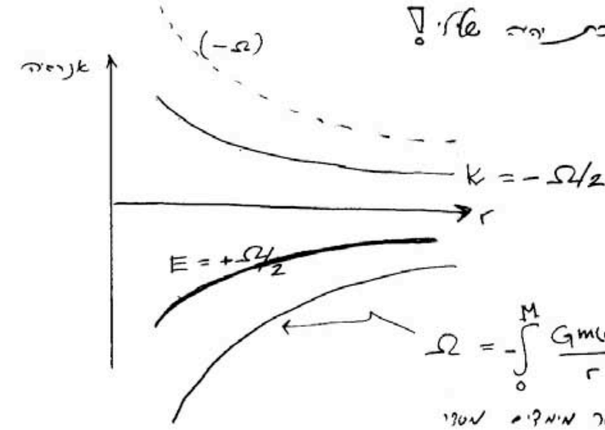
עבור גאז מונואטמי, $K = U$ דהיינו, האנרגיה הפנימית הכוללת U היא
האנרגיה הקינטית הקשורה לטרנסלציה (ואין דרגות חופש פנימיות נוספות)
ואז מתקבל שהאנרגיה הכוללת היא:

$$\underbrace{E}_{\text{אנרגיה כוללת}} = U+\Omega = K+\Omega = \begin{cases} +\frac{1}{2}\Omega \\ -U \quad \text{וגם:} \end{cases}$$

כלומר, האנרגיה הפנימית הכוללת היא שלילית. היות ו- U יחסי לטמפ' (ומעשה: $U=\frac{3}{2}\sum_i kT_i$) מקבלים ש-E יחסית הפוך לטמפ'

$\Leftarrow$ קיבול החום של המערכת יהיה שלילי!

באופן גרפי:



$$\Omega = -\int_0^M \frac{Gm(r)}{r}\,dm \approx -\alpha\frac{GM^2}{r_*}$$

α – מספר חסר מימדים מסדר גודל של יחדה.

מה זה אומר? אם הכוכב מתכווץ (מקרין) אזי האנרגיה הכוללת שלו קטנה. זה אומר שהוא מאבד אנרגיה והיא נפלטה. אולם האנרגיה הפוטנציאלית קטנה עוד יותר והאנרגיה הקינטית = אנרגיה תרמית של החלקיקים עולה. דהיינו הגאז מתחמם. (ושוב חוזרים לכך שקיבול החום שלילי!).

תכונה זו חשובה מאוד ליציבות של כוכבים. אנו יודעים שכוכבים יוצרים אנרגיה ע"י ראקציות גרעיניות. אם הכוכב מתכווץ מעט, אזי הטמפ' תעלה, קצב הראקציות הגרעיניות יעלה, ויגדיל את הלחץ כך שהכוכב ירצה לחזור חזרה למצב הקודם במקום להמשיך להתכווץ.
כאשר נגמר הדלק גרעיני מסוג אחד (לדוגמא מימן, או הליום) ההתכווצות תגדיל את הטמפ' עד שהדלק הבא יוכל להתחיל לבעור, להגדיל את הלחץ ולעצור את ההתכווצות.

המשוואה ההידרוסטטית

נסתכל על אלמנט מסה בנפח dV נתון בעל מסה ρ. נמצא כעת מהי המשוואה המתארת את שיווי המשקל של האלמנט.

בשיווי משקל, האלמנט אינו מאיץ, וסכום הכוחות שווה לאפס. הכוחות מתחלקים לכוחות פנימיים (לחץ) ולכוחות חיצוניים (לדוגמא כבידה).

נניח שהכח ליח' נפח, החיצוני הוא $\vec{f}_v$ אזי הכח החיצוני הכולל הוא:

$$\vec{F}_{ext} = \int_V \vec{f}_v \, dv$$

הכח הכולל מהלחץ הוא:

$$\vec{F}_{int} = \int_S (-P)\,\hat{n}\, dS = \sum_{i=x,y,z} \int_S (-P)\,\hat{x}_i \cdot \hat{n}\, dS$$

$$= -\sum_i \int_V \vec{\nabla}\cdot(P\hat{x}_i)\, dv = -\int_V \overbrace{\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\hat{x}_i}^{\equiv \vec{\nabla} P}\, dv$$

$$= -\int_V \vec{\nabla} P\, dv$$

למעשה מפרידים את F_{int} לסכום וקטורי של שלושת הרכיבים המרכיבים אותו בכיוונים x,y,z.

ממשפט גאוס.

דהיינו, סכום הכוחות הוא:

$$0 = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \int_V \vec{f}_v \, dv + \int_V (-)\vec{\nabla} P \, dv$$

הואיל והנפח הוא שרירותי, השוויון מתקיים גם נקודתית:

$$0 = \vec{f}_v - \vec{\nabla} P$$

(במידה והכוחות לא שווים, האלמנט מקבל תאוצה. למשוואה הכוללת את תאוצת האלמנט קוראים משוואת אוילר, אותה אנו נראה בהמשך).

* במקרה כדורי, הגדלים הם פונקציה של r בלבד. ונקבל:

$$\vec{\nabla} P = \vec{f}_v \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\underbrace{\frac{GM(r)}{r^2}}\,\rho \equiv \text{המשוואה ההידרוסטטית}$$

f_g הכח ליח' מסה, הלא היא התאוצה הגרביטציונית.

על מנת להפוך מ"יח' מסה" ל"יח' נפח" יש להכפיל ב-ρ.

דרך אחרת להסתכל על המשפט הויריאלי:

מקודם, בחנו מערכת מיקרוסקופית של חלקיקים והגענו אל המשפט הויריאלי המדבר על גדלים ממוצעים של המערכת. נסתכל כעת על המערכת בעזרת גדלים מקרוסקופיים והמשוואה ההידרוסטטית

(עצם העובדה שאני משתמשים במשוואה ההידרוסטטית אומר שגודל כמו I של המערכת נשאר קבוע ולכן התנאים דומים לתנאים מקודם).

המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM(r)}{r^2}$$

נכפיל את הצדדים ב- $\frac{4\pi}{3}r^3dr$ $V(r)dr$ ונקבל:

$$V(r)dP = -\frac{1}{3}\underbrace{4\pi r^2\rho dr}_{dM}\frac{GM(r)}{r} = -\frac{1}{3}\frac{GM}{r}dM$$

אם מבצעים אינטגרציה של הצד השמאלי על כל הכוכב, מתקבל:

$$\int VdP = PV\Big|_0^R - \int PdV$$

האיבר הראשון מתאפס היות וב- $r=0$ נקבל ש- V מתאפס וב- $r=R$ הלחץ החיצוני על הכוכב מתאפס.

מאידך גיסא, $-\int\frac{GM}{r}dM = \Omega$ לכן:

$$-3\int PdV = \Omega$$

ממכניקה סטטיסטית, ידוע שבמקרה של גז מונואטומי האנרגיה הפנימית ליח' נפח (או האנרגיה הקינטית ליח' נפח)

$$U_v = K_v = \frac{3}{2}P$$

כאן נקבל:

$$-3\int K_v\cdot\frac{2}{3}\,dV = -2K = \Omega$$

במקרה של גז עם אנרגיה פנימית נוספת עדיין $K_v=\frac{3}{2}P$ אולם יש תוספת נוספת עבור U. כלומר, עדיין $K=-\Omega/2$

במקרה היחסותי:

$$K_v = 3P$$

ואז:

$$\hookrightarrow K = -\Omega$$

במקרה היחסותי המונואטומי:

$$E = K+\Omega = 0 \;!$$

ומה קורה עבור גאז כללי, עם מקדם אדיאבטי γ?

במקרה הכללי, פרט לאנרגיה הקינטית הטרנסלטורית של החלקיקים, ישנה אנרגיה פנימית נוספת:

$$U_{int,v} = \underbrace{\beta n k T}_{P} = \beta P = \underbrace{\left(\beta - \tfrac{3}{2}\right)P}_{\text{אנרגיות פנימיות אחרות (סיבוב, ויברציה וכו'...)}} + \overbrace{\underbrace{\tfrac{3}{2}P}_{\text{אנרגיה קינטית טרנסלטורית}}}^{K_v}$$

ליח' נפח.

עדיין מתקבל: $K = -\frac{\Omega}{2}$ אולם הפעם, בחשבון דרוש האנרגיה הכוללת, יש לקחת את התוספת הפנימית:

$$E = \underbrace{K}_{-\frac{1}{2}\Omega} + \Omega + \underbrace{\int dV\left(\beta - \tfrac{3}{2}\right)P}_{\left(\beta-\frac{3}{2}\right)\underbrace{\frac{2}{3}K}_{-\frac{1}{3}\Omega}} = \Omega\left[-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\left(\beta - \frac{3}{2}\right)\right]$$

כזכור מתרמודינמיקה, הקשר בין β ומקדם האדיאבטי הינו:

$$\gamma = \frac{\beta+1}{\beta} \longrightarrow \beta = \frac{1}{\gamma-1}$$

ולכן:

$$E = \Omega\left[1 - \frac{\beta}{3}\right] = \Omega\left[1 - \frac{1}{3(\gamma-1)}\right] = \Omega\left[\frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\right]$$

אנו רואים שעבור $\gamma = 4/3$ שמתאים לגאז יחסותי, אנו שוב מקבלים שהאנרגיה הכוללת מתאפסת. עבור γ קטן יותר האנרגיה הכוללת חיובית, כלומר, שווה למערכת להתפשט ל-∞. כמו כן, הקיבול חום יהיה חיובי והתכונות המעניינות שתוארו של יציבות הכוכב שלנו אינן מתקיימות עוד. עוד אנו מוצאים שעבור $\gamma \to 1$, כלומר גאז איזותרמי, מתקבל $\frac{E}{\Omega} \to \infty$. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שלא ניתן לקבל פני שטח כוכב עם $P=0$ ברדיוס סופי, ועם נמשיך אינטגרציה החוצה, נמצא עוד ועוד מסה מכבר שלא תורמת ל-Ω אך כן תורמת ל-K (ול-E).
(אין פתרון קונסיסטנטי לגאז איזותרמי עם רדיוס סופי ו- $P=0$ בשפה).