הרצאה בנושא: גלי הלם

משוואת האנרגיה

משוואת האנרגיה מתקבלת מהחוק הראשון של התרמודינמיקה. (נסתכל על אלמנט בעל יח' מסה.
יתקיים עבורו כי:

$$dU = Q - P\,dV$$

או ליח' זמן:

$$\frac{dU}{dt} + P\frac{dV}{dt} = q$$

q – קצב חימום ליח' מסה ליח' זמן.

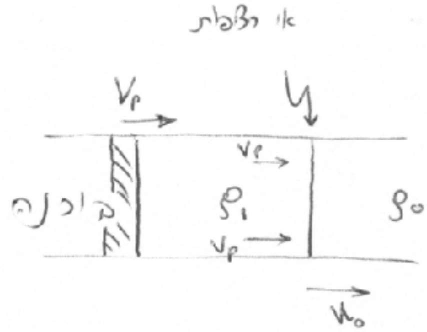
$U = \mathcal{E}/\rho$ – אנרגיה ליח' מסה; $\mathcal{E}$ – אנרגיה ליח' נפח.

$V \equiv 1/\rho$ ← הנפח של יח' מסה

אחרי עבודה (כעמוד) של אלגברה ושימוש במשוואת הרציפות והתנע ניתן להראות
(L&L Fluid Mechanics של §6 - החישוב מתואר)
ש-:

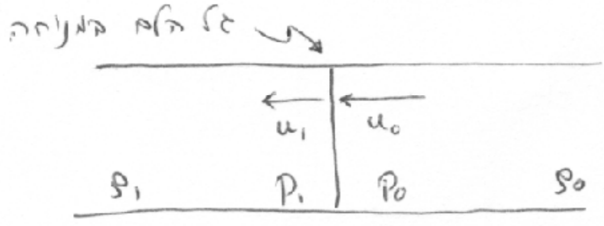
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\underbrace{\mathcal{E} + \tfrac{1}{2}\rho u^2}_{\text{צפיפות אנרגיה של החומר}}\Big] + \nabla\cdot\Big[\underbrace{\vec{u}\left(\mathcal{E} + \tfrac{1}{2}\rho u^2\right)}_{\text{שטף אנרגיה}} + \underbrace{P\vec{u}}_{\text{שטף עבודה מכנית}}\Big] = \underbrace{\rho q}_{\text{קצב הכנסת חום ליח' נפח}}$$

גלי הלם:



האם ניתן למצוא פתרון עם אי רציפות?

כדי לפתור את הבעיה של גל הלם, נעבור למערכת של האי רציפות.



אנו רוצים למצוא קשרים בין הגדלים לפני הגל הלם (בצד ימין) לגדלים אחרי.

ראשית - היות ואנו במערכת הגל, הגדלים אינם משתנים כפונקציה של הזמן, דהיינו, ערך נופל מהמשוואות. הן נראות:

נופל

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\ )} + \nabla\cdot(\ ) = (\ )$$

כמו כן, המקור בצד ימין יספיק מעט מאוד לתרום אם מדובר בשינוי מ- אפס+ ל- אפס-. נסתכל על נפח קטן מסביב לגל הלם ונראה זאת במפורש:

$$\int\left[\nabla\cdot(\vec{\phi}) - (q)\right] dV = 0$$

בגבול dV נקבל, האיבר מתאפס.

כמו כן:

$$\int\left[\nabla\cdot(\vec{\phi})\right] dV = \oint \vec{\Phi}\cdot d\vec{s}$$

על הצדדים הניצבים לגל ההלם, התרומות של $\vec{\phi}\cdot d\vec{s}$ מהצדדים המנוגדים מתבטלות אוטומטית, ואולם, אין זה המקרה עבור הצדדים שמקבילים ל-Φ היות וישנם גדלים שעוברים אי רציפות בתוך הקיבול ל-Φ-ים. לכן, נקבל:

$$\Phi_{\perp,1} - \Phi_{\perp,0} = 0$$

הרכיב של $\vec{\phi}$ שניצב לגל ההלם

נותר כעת להשתמש במשוואות ההידרודינמיקה ולקבל את התנאים:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_0 u_0 \\ P_1 + \rho_1 u_1^2 &= P_0 + \rho_0 u_0^2 \\ U_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}u_1^2 &= U_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2}u_0^2 \end{aligned}}$$

בעזרת המשוואה הראשונה והשניה, ניתן לקבל:

מ-1: $u_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} u_0$

מ-2: $\rho_0 u_0^2 - \rho_1 u_1^2 = P_1 - P_0 \Rightarrow \rho_0 u_0^2 - \frac{\rho_0^2}{\rho_1} u_0^2 = P_1 - P_0$

ולכן:

$$(\rho_1 u_0^2 - \rho_0 u_0^2) = \frac{\rho_1}{\rho_0}(P_1 - P_0)$$

או

$$\boxed{u_0^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)}}$$

עבור P שהוא מונוטוני ב-ρ (תמיד...) נקבל:

$$c_1^2 > \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 - \rho_0} > c_0^2 \quad ; \quad c = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

ולכן:

$$u_0^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} > \frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} > c_0^2$$

כי $\rho_1 > \rho_0$

אם נחליף את האינדקסים ונזכור שהפעם $\rho_0 < \rho_1$, נקבל:

$$u_1^2 = \frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} < \frac{(P_1 - P_0)}{(\rho_1 - \rho_0)} < c_1^2$$

המשמעות שמתקבלת היא שהגל הלם חייב לנוע במהירות סופר-סונית יחסית לגאז אליו הוא נכנס (גל הלם חייב להיות על קולי!) ואילו הגאז שמתרחק מהגל הלם, חייב לנוע במהירות תת-קולית יחסית לגל הלם.

כדי שנוכל להשתמש במשוואה האחרונה אנחנו צריכים עוד קשר המקשר בין U או ε ל- P, V וכו'..

היות והגל הלם מתרחש על זמן אינפיניטיסימלי, הגאז אינו יכול להחליף חום עם הסביבה ולכן הוא יהיה אדיאבטי:

$$P = A \rho^{\gamma}$$

γ - הקבוע האדיאבטי. ($\gamma = 5/3$ עבור גאז חד-אטומי.)

בתהליך אדיאבטי:

$$dU = -P\,dV = -A V^{-\gamma} dV$$

ולכן:

$$U = -A \frac{1}{1-\gamma} V^{1-\gamma} = + \frac{V}{\gamma - 1} A V^{-\gamma}$$

ולבסוף:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\frac{U}{V}}} = + \underline{\underline{\frac{P}{\gamma-1}}}$$

את המשוואה האחרונה של תנאי הגל הלם, ניתן לרשום בצורה:

$$U_1 - U_0 = \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_0^2 = \frac{1}{2}(P_1 + P_0)(V_0 - V_1)$$

הצבה של u_0, u_1

ממוצע של העבודה המכנית בדחיסת הגאז.

אם נציב את הקשר האדיאבטי, נקבל:

$$\frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{1}{2}(P_1+P_0)(V_0+V_1)$$

אחרי מניפולציות מקבלים:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{(\gamma+1)V_0 - (\gamma-1)V_1}{(\gamma+1)V_1 - (\gamma-1)V_0}$$

או:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{(\gamma-1)P_1 + (\gamma+1)P_0}{(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_0}$$

בגבול של גל הלם חזק מאד $\frac{P_1}{P_0} \to \infty$ ואז:

$$\frac{V_1}{V_0} \to \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 4$$

$\gamma = 5/3$

דהיינו, לא ניתן לדחוס את הגאז יותר מפקטור מסוים ללא כל קשר לכמה חזק הגל הלם.