אטימות של Rosseland

אטמוספירות אמיתיות הן לא "אפורות" בדר"כ, דהיינו, האטימות תלויה באורך גל.
אם כן, מהי האטימות שיש להשתמש במשוואת מעבר קרינה? איזה ממוצע של
ה-κ_ν - האטימות ליח' תדירות יש להשתמש?

נניח לשם פשטות שיש רק בליעה. במקרה כזה משוואת מעבר הקרינה תהיה:

$$\frac{dI_\nu}{dx} = -\kappa_\nu I + \kappa_\nu B_\nu(T)$$

כאשר הפונ' $B_\nu(T)$ היא פונקצית פלנק - כמה קרינת גוף שחור נפלטת ליח' תדירות?

$$\int_0^\infty \underbrace{B_\nu(T)}_{\text{פונקצית פלנק}}\, d\nu = \sigma T^4$$

בשעור קודם ראינו שפתרון משוואת המעבר קרינה לאטמוספירה אפורה, דהיינו של:

$$\frac{dI}{dx} = -\kappa I + \kappa B(T)$$

(כאשר ה-κ-ות קטן ליח' נפח כמובן) הוא שטף כולל של:

$$F_{tot} = -\frac{16}{3} B(T) \frac{\nabla T}{\kappa}$$ (לאטמוספירה אפורה)

לכן, פתרון משוואת הקרינה עבור תדירות ν מסוימת (בגבול עבים ליח' תדר) הוא:

$$\vec{F}_\nu = -\frac{16}{3} B_\nu(T) \frac{\nabla T}{\kappa_\nu}$$

וזה בגלל שהתדרים השונים אינם מתערבבים, חוץ מדרך בליעה וקרינת גוף שחור.

השטף הכולל יהיה אם כן:

$$F_{tot} = \int F_\nu d\nu =$$

$$= -\frac{16}{3} \nabla T \int d\nu \frac{B_\nu(T)}{\kappa_\nu}$$

אולם, אנו רוצים לעבוד עם אטימות אפקטיבית, כלומר, עם ביטוי מהצורה:

$$F_{TOT} = -\frac{16}{3}\frac{\nabla T}{\bar{K}} \overbrace{B_{TOT}(T)}^{\equiv \sigma T^4}$$

לכן, אנו מגדירים את האטימות הממוצעת כ-

האטימות של רוסלנד Rosseland $\equiv \bar{K}^{-1} \equiv \dfrac{\int d\nu \, \frac{B_\nu(T)}{K_\nu}}{\int d\nu \, B_\nu(T)}$

האטימות של רוסלנד היא ממוצע הרמוני של האטימות משוקללת לפי פונקציית פלנק באותו תדר. הסיבה שהממוצע הוא על $1/\kappa$ ולא κ עצמה היא שאזורים עם אטימות גבוהה תורמים מעט מאוד לשטף קרינה היות ואותו גרדיאנט טמפ' לא יכול לעבור דרכם.

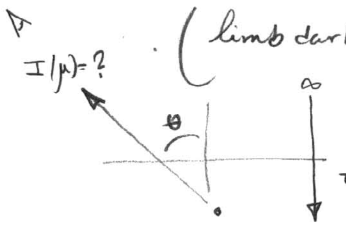
אטימות של קרמר Kramer's Opacity

בתחום רחב של אטימות אטומית (ביחוד לאטומים נמוכי Z) הממוצע של רוסלנד של ה-κ ניתן תלות פונקציונלית:

$$\bar{K}_m = \rho \, T^{-7/2}$$

ליח' מסה

שימו לב שהאטימות ליח' מסה גדלה עם הצפיפות. (חשוב יעשה בתרגיל בית...)



הקרינה שיוצאת מאטמוספירה (וגם קווים ספקטרליים ו- limb darkening)

$\mu \equiv \cos\theta$

מעניין אותנו כעת לדעת מהו $I(\mu)$ שנפלט מאטמוספירה.

נעבוד עם τ - העומק האופטי מ-∞ לאורך האנך לאטמוספירה:

$$\tau(z) = \int_z^\infty \kappa_\nu \, dz$$

ואת μ המוגדר כ- $\cos\theta$ - θ הזווית לאנך.

נתחיל בלחשב את הסיכוי שפוטון שנפלט בנקודה מסוימת יגיע אל צופה ב-μ. ההסתברות הזו היא:

$$P = \exp(-\tau/\mu)$$

מופיע τ/μ כי לאורך קרן אלכסונית יש פי $1/\mu$ יותר חומר ולכן τ באותו כיוון יותר גדול.

מאותה נקודה נפלט כמות אור של $S'(\tau) \equiv \kappa_\nu B(T)$ S' היא אם כן פונקצית "המקור".

סה"כ, מכל הנקודות לאורך הקרן, נקבל:

$$I = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\mu} \exp(-\tau/\mu)\, S'(\tau)$$

עבור μ קטן יש יותר מקורות!

אם אנו יודעים כיצד נראה פרופיל הטמפ', ניתן לבצע אינטגרציה ולמצוא את I. שימו לב שהנחנו שאין תלות בתדר, היינו יכולים לרשום עבור כל תדר בנפרד:

$$I_\nu = \int_0^\infty \frac{d\tau_\nu}{\mu} S'(\tau_\nu) \exp(-\tau_\nu/\mu)$$

כדי לחשב את S, נסתכל על המקרה הלא טריוואלי הפשוט ביותר:

$$S_\nu = a_\nu + \tau_\nu b$$

זהו הקירוב של Eddington-Barbier. הוא מניח שפליטת האנרגיה גדלה לינארית עם האטימות.

שימו לב שפונקצית המקור היא יחסית לאטימות ולכן באורך גל בו האטימות גדולה יותר יופיע τ שהוא גדול יותר בהתאם.

במקרה כזה נקבל:

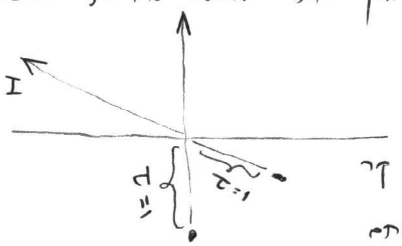
$$I(\mu,\tau_\nu=0) = \int_0^\infty \frac{d\tau_\nu}{\mu}\left(a_\nu + \tau_\nu b_\nu\right)\exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right)$$

$$= a_\nu + b_\nu \mu$$

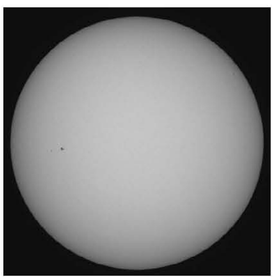
אחרי חישוב האינטגרלים...

מה שמעניין הוא ש- $I(\mu,\tau_\nu=0) = a_\nu + b_\nu\mu = S\left(\tau_\nu/\mu = 1\right)$

כלומר אנו רואים קרינה שאפקטיבית מגיעה מעומק אופטי יחידה לאורך הקרן. אם מסתכלים לאורך האנך למשל, נראה עמוק יותר מאשר אם אנו מסתכלים בזווית:



לרוב, ישנה נגזרת שלילית של הטמפ' עם הגובה, לכן הקרן שמגיעה בזווית תהיה עם T^4 שהוא קטן יותר. לכן, בזווית האטמוספירה תראה כהה יותר! אפקט זה נקרא limb darkening.

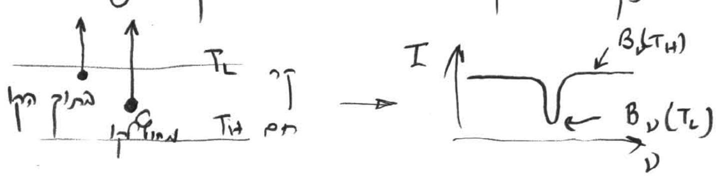


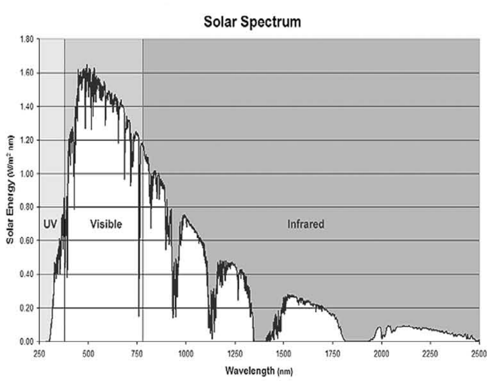
תמונה של השמש באור נראה - הקצוות כהים יותר באמת!

ניתן גם להבין כעת כיצד נוצרים קווי בליעה.

אם נסתכל על קו בליעה

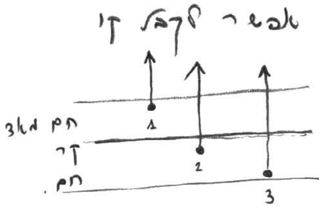
אזי בתוך הקו, האופטיות גדולה יותר ולכן בכל זווית μ, נקבל שעומק אופטי יחידה מתקבל גבוה יותר באטמוספירה

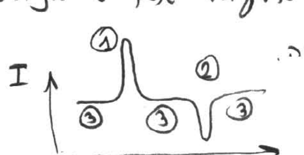




הקווים כהים כי הם מגיעים מאיזורים כהים יותר.

אולם, לרוב הטמפ' יורדת עם הגובה, ולכן ק' שמגיעה מאיזור גבוה יותר יהיה פחות בהיר ולכן נראית כמו ק' בליעה. אם יש "אינברסיה" אפשר לקבל ק' פליטה.





תאור הקרינה ע"י מומנטים:

ראינו שצריך לתאר את I כפונקציה בו-זמנית של ה-4π כיוונים, לכן, ניתן לתאר את I ע"י פירוק למומנטים, למשל ע"י סכום של Y_ℓ^m-ים.

אם מדובר בבעיה עם סימטריה מישורית, אזי רק θ נהיית חשובה היות ואין תלות בזווית האזימוטלית φ, במקרה כזה, יהיה לנו מומנטים רק ב θ (או μ). ניתן לרשום:

$$J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu d\mu$$

- מומנט סדר אפס - ממוצע של I.

$$H_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \cos\theta\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu I_\nu d\mu$$

- מומנט סדר ראשון - קשור לשטף F.

$$K_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2 I_\nu d\mu$$

ולמעשה אפשר ללכת לסדרים גבוהים יותר (אם רוצים...).

משוואת מעבר הקרינה היא:

$$\underbrace{\frac{dI}{ds}}_{\text{לאורך הדרך}} = \mu \frac{dI}{d\underbrace{z}_{\text{נתאר בעזרת}}} = -\overbrace{\kappa_\nu}^{\text{בליעה}}(I_\nu - B_\nu) - \overbrace{\sigma_\nu}^{\text{פיזור}}(I_\nu - J_\nu)$$

מניח פיזור איזוטרופי: $= \frac{1}{4\pi}\int I\, d\Omega$

נמצע את המשוואה על כל הכיוונים $\frac{1}{4\pi}\int (\,)d\Omega$ ונקבל:

$$\frac{dH_\nu}{dz} = -\kappa_\nu (J_\nu - B_\nu) + 0$$

כעת, נכפיל את המשוואה ל-I ב-μ ואז נבצע אינטגרציה $\frac{1}{4\pi}\int \mu(\,)d\Omega$ משמאלה.

נקבל:

$$\frac{dK}{dz} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) H_\nu$$

אנו רואים שהנגזרת של כל סדר תלויה בסדר הקטן יותר ב-1 (H ב-J, K ב-H וכו'...). לכן, צריך להניח משהו כדי לסגור את המשוואות.

קירוב אדינגטון:

קירוב אדינגטון הוא קירוב של השדה קרינה שמאפשר את סגירתו. בקירוב זה מניחים ששדה הקרינה הוא קרינה איזוטרופית + דיפול, כלומר:

$$I = a + \mu b$$

במקרה כזה:

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I\,d\mu = a$$

$$H = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu(a+\mu b)\,d\mu = \frac{b}{3} \qquad K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2(a+\mu b)\,d\mu = \frac{a}{3}$$

כלומר: $K = J/3$. קירוב של אדינגטון הוא אם כן:

$$\boxed{K = J/3}$$

מקור ה-$1/3$ הוא העובדה ש-K קשור ללחץ (בעולם 3D K הוא טנזור סימטרי 3×3 שקשור לטנזור לחץ-אנרגיה) ואת בשדה קרינה הלחץ הוא שליש מצפיפות האנרגיה (אנו מקבלים כאן שליש גם כן). ניתן לעשות למשל את הקירוב שבו אחד דרגה יותר ולקבל משוואות מורכבות יותר. ניתן לקרוא על זה בלינק:

במערכת אדינגטון, נקבל אם כן ש-

$$\frac{1}{3}\frac{dJ_\nu}{dz} = -(\kappa_\nu+\sigma_\nu)H_\nu$$

או אם נחבר את שתי המשוואות יחד:

$$\frac{d^2 J_\nu}{dz} = 3\kappa_\nu(\kappa_\nu+\sigma_\nu)(J_\nu - B_\nu)$$

בתנאים מסוימים, ניתן להניח כי טמפ' הגז בשיווי משקל עם טמפ' הקרינה. תנאי זה נקרא: Local Thermal Equilibrium (LTE) ואז: $J = B$ ומתקבל:

$$\frac{dH}{dz} = 0 \Rightarrow H = const \longrightarrow \text{שטף קבוע}$$

(ברור! כי אין מה שיוצר - מה שנבלע מיד נפלט!)

אם נבצע אינטגרציה, נקבל:

$$\frac{dJ_\nu}{dz} = -3(\kappa_\nu+\sigma_\nu)H_\nu$$

$$J_\nu = 3\tau H_\nu + \underbrace{J_\nu(\tau=0)}_{\text{תנאי שפה}}$$

כיצד נקבל את תנאי השפה? נשווה לתוצאות שקבלנו ל- I ליד השפה תחת הקירוב של אדינגטון-ברביאר:

$$I(\tau=0,\mu>0) = a+\mu b$$

$$I(\tau=0,\mu<0)=0$$ כי אין שטף מלמעלה!

השטף הוא:

$$H=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu I(\mu)d\mu = \frac{1}{2}\int_0^1\mu(a+\mu b)d\mu = \frac{a}{4}+\frac{b}{6}$$

אולם אם נשווה את $I(\mu)$ ל- S שנתן אותו:

$$S=a+\tau b$$

ובמקרה שלנו $S=B=J$ ולכן:

$$a=J_\nu(\tau=0)$$

$$b=3H_\nu$$

כלומר:

$$H_\nu=\frac{J_\nu}{4}+\frac{3H_\nu}{6}=\frac{J_\nu}{4}+\frac{H_\nu}{2} \Rightarrow J_\nu=2H$$

וצפיפות האנרגיה כתלות ב- τ היא:

$$\boxed{J_\nu=(3\tau+2)H_\nu}$$

צפיפות האנרגיה היא:

$$E=4\pi J$$

והשטף הוא:

$$F=4\pi H$$

ולכן:

$$E=(3\tau+2)F$$