מעבר קרינה

על מנת לפתור את בעיית מבנה הכוכבים, יש להשתמש במספר משוואות:

1) המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$$

2) משוואת עזר לחישוב המסה:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

3) משוואת מצב. במקרה הפשוט היה קשר פוליטרופי מהצורה:

$$P = K\rho^{\gamma}$$

אולם במקרה הכללי ישנן משוואות יותר מורכבות, לדוגמא,
עבור גאז אידיאלי:

$$P = \frac{k}{\mu m_p}\rho T$$

במקרה כזה, נכנסת הטמפרטורה למשחק ויש למצוא משוואות מהן ניתן יהיה למצוא את T. המשוואות הללו הן:

4) משוואה לקצב יצירת האנרגיה בכוכב (דהיינו, ריאקציות גרעיניות), אותן נראה בהמשך.

5) משוואה למעבר אנרגיה. ספציפית, מעבר אנרגיה יכול להתרחש ע"י:

א. מעבר קרינה (ז.א. העברת אנרגיה ע"י תנועה של פוטונים).

ב. קונבקציה: כאן העברת האנרגיה נעשית ע"י תנועה של אלמנטים מקרוסקופיים (דהיינו, גדולים). אלמנטים חמים עולים למעלה וקרים יורדים למטה (כך שנטו יש מעבר חום למעלה). תופעה זו מתרחשת בסיר עם מים רותחים.

ג. הולכה. כאן, העברת האנרגיה נעשית ע"י התנועה המיקרוסקופית של החלקיקים. חלקיקים מהירים (חמים) בצד אחד מתנגשים עם חלקיקים קרים בצד שני ומעבירים אנרגיה (חום) מהצד החם אל הקר.

אני נתרכז באפשרות הראשונה בהרצאה זו.

נניח לשם פשטות כי:

א. התווך הוא "אפור" (Gray Approximation). משמעות ההנחה היא כי:
הסיכוי לבלוע או לפזר פוטון אינו תלוי באורך הגל.

ב. נניח כי אין פיזור כלל. ז"א פוטון יכול רק להבלע או להפלט.

נגדיר את האטימות K_ν בצורה:

* $K_\nu dx$ הינו הסיכוי שפוטון יבלע אחרי מעבר מרחק dx נתון.
(יחידות K_ν הן 1/אורך ז"א $1/K_\nu$ יהיה אורך אופייני שפוטון יכול לעבור לפני שהוא נבלע).

* נגדיר את I כעוצמת הקרינה ליחידת זוית מרחבית
ביחידות: $erg/cm^2\,s\,sr$. עוצמה זו תתאר את שטף הקרינה
הנע בכיוון מסוים.
המשוואה שתתאר אותו תראה:

$$\underbrace{dI}_{\text{השינוי בשטף הקרינה}} = -\underbrace{K_\nu I\,dx}_{\text{כמות הבליעה הכוללת}} + \underbrace{B(T)\,dx}_{\text{הפליטה}}$$

השינוי בשטף הקרינה

כמות הבליעה הכוללת: $K_\nu dx$ הוא סיכוי הבליעה לפוטון בודד.

הפליטה, היא תהיה תלויה בטמפ' ונגיע אליה בהמשך.

אם אין פליטה, $B=0$ ונקבל:

$$\frac{dI}{dx} = -K_\nu I \rightsquigarrow I = I_0 \exp(-K_\nu x)$$

ז"א אם בנקודה מסוימת ישנה קרן בעלת שטף I_0, אזי עוצמת הקרן (ומספר הפוטונים) יקטן אקספוננציאלית עם המרחק.

הסיכוי שפוטון שכבר היה קיים ב-$x=0$ להבלע ב-x נתון הוא:

$$P(x) \propto -\frac{dI}{dx}\Big|_x = K_\nu I(x) = K_\nu I_0 \exp(-K_0 x)$$

תנאי הנירמול (כדי למצוא יחס "=" במקום "$\propto$") מתקבל מכך שסיכוי הבליעה הכולל הוא 1:

נקבל:

$$P(x) = \frac{k_\nu I_0 \exp(-k_\nu x)}{\int k_\nu I_0 \exp(-k_\nu x)dx} = \frac{\exp(-k_\nu x)}{\int \exp(-k_\nu x)dx}$$

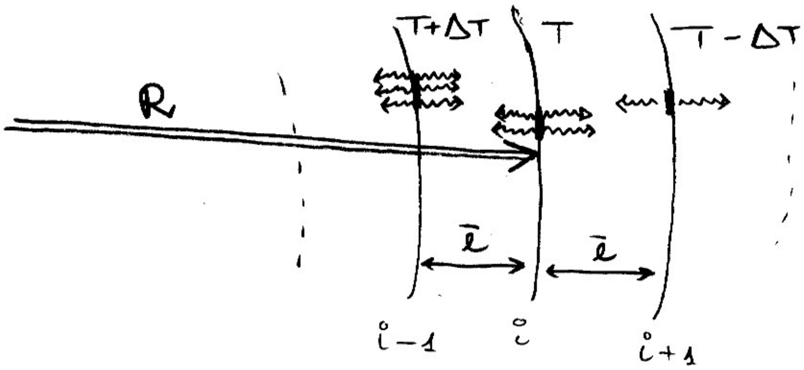
כך ש- $\int_0^\infty P(x)dx = 1$. המרחק הממוצע (תוחלת המרחק) אליו יגיעו הפוטונים, הוא:

$$\bar{l} = \int P(x)x\,dx = \frac{\int x \exp(-k_\nu x)dx}{\int \exp(-k_\nu x)dx} = k_\nu^{-1}$$

כלומר, k_ν^{-1} הוא גם המרחק הממוצע אליו יגיע פוטון לפני שיבלע.

מודל פשוט למעבר קרינה (ולא מדויק!).

נבנה כעת מודל פשוט, ולא הכי מדויק למעבר קרינה בהתבסס על העובדה הנ"ל. במקום שפוטונים ינועו מרחק x בהתפלגות אקספוננציאלית עד שהם נבלעים, נניח ראשית שהם כולם נעים מרחק $\bar{l}$ במדויק בין הפליטה והבליעה. כמו כן, נניח שכל החומר מרוכז בשכבות. כל אחת נמצאת בטמפ' במעט שונה אחת מהשניה:



כל שכבה נמצאת בשיווי משקל עם שכנותיה. כל שכבה פולטת σT_i^4 לכל אחד משני הכיוונים שלה. שכבה i מקבלת מצד אחד $(i+1)$ פחות קרינה ומהצד השני מקבלת יותר כך שבנטו יש מעבר קרינה לצד ימין.

סך השטף בין i לבין $i+1$ הוא:

$$F = -\sigma T_{i+1}^4 + \sigma T_i^4 = -\sigma \underbrace{(T_i - \Delta T)^4}_{\approx T_i^4 - 4T_i^3\Delta T} + \sigma T_i^4$$

$$\cong 4\sigma T_i^3 \Delta T$$

עבור $\Delta T \ll T_i$

אולם:

$$\Delta T = \frac{dT}{dx}\bar{\ell}$$

כלומר:

$$F = 4\sigma T^3 \frac{dT}{dx}\bar{\ell} = 4\sigma T^3 \frac{dT}{dx}\frac{1}{k_\nu}$$

לעיתים, במקום לעבוד עם k_ν (האטימות ליח' נפח שנקרא גם extinction) עובדים עם $k_m = k_\nu/\rho$ שהיא האטימות ליח' מסה. k_ν הוא הגודל שיותר טבעי לעבוד איתו כאשר מדברים על מעבר קרינה. אולם, k_m הוא הגודל היותר טבעי של החומר. הוא למעשה שטח הפיזור/בליעה של אטום σ אחד כפול מספר האטומים ליח' מסה (N_A/μ).

במבנה כוכבים, הגודל היותר טבעי לעבוד איתו הוא עוצמת הארה הכוללת ולא השטף:

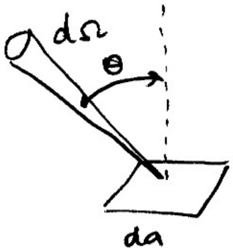
$$\underbrace{L_{rad}}_{\text{מקרינה}} = 4\pi r^2 F = \frac{4\pi r^2 \sigma T^3}{k_\nu}\frac{dT}{dx}$$

עד כדי פקטור של 4/3 זוהי הנוסחא הבסיסית למעבר קרינה בכוכב. מחוץ לאיזור בו הכוכב מייצר אנרגיה ובהנחה שאין מעבר אנרגיה ע"י שיטה אחרת (לדוגמא, קונבקציה), L_{rad} יהיה קבוע כך שנקבל משוואה מהצורה:

$$\frac{dT}{dx} = \ldots$$

בעזרתה נוכל לחשב את הטמפ' בכוכב.

צפיפות האנרגיה בגוף שחור (כמה שווה $B(T)$?)



נסתכל על אלמנט שטח בטמפ' T

האלמנט פולט אנרגיה בקצב:

$da\,\sigma T^4$, (או σT^4 אנרגיה ליח' זמן ליח' שטח). מתוך ה-σT^4, כמות מסוימת תכנס לתוך $d\Omega$ (אלמנט זוית מרחבית). הכמות הזו תהיה:

$$\underbrace{I(\theta)}d\Omega = \sigma T^4 \cos\theta \, d\Omega * N$$

אנרגיה ליח' שטח ליח' זמן ליח' זוית מרחבית

$\cos\theta$ הוא פקטור זויתי שחייב להכנס, זאת מפני שהשטח שהאלמנט יראה בתוך $d\Omega$ יהיה ההיטל של da על הכיוון θ, ולפיכך הפקטור $\cos\theta$. הפקטור N הוא מקדם נירמול. התנאי נירמול הוא ששטף האנרגיה הנכנס לכל האלמנטים $d\Omega$ מעל המישור הוא פשוט σT^4:

$$\int I(\theta)d\Omega = \sigma T^4 \rightarrow \int \sigma T^4 \cos\theta \, d\Omega * N = \sigma T^4$$

או:

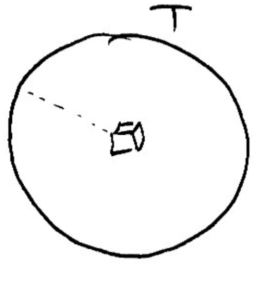
$$N^{-1} = \int \cos\theta \, d\Omega = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi$$

כלומר:

$$I(\theta) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \cos\theta$$

עד פה $I(\theta)$ היא עוצמת הקרן בכיוון θ כרגיל, אנרגיה ליח' שטח ליח' זמן ליח' זוית מרחבית.

* נסתכל על כדור בטמפ' T אחידה.



מה תהיה צפיפות האנרגיה E במרכז הכדור?

(E - אנרגיה ליח' נפח). הקשר בין E ל-I הוא:

$$E = \frac{1}{c} \int d\Omega \cdot I$$

כדי להפוך שטף לצפיפות אנרגיה יש לחלק במהירות החלקיקים, במקרה זה c.
כמו כן, יש לסכם את התרומות של השטף שמגיע מכל זוית מרחבית ולכן ה-$\int$

ז.א.

$$E = \frac{1}{c}\int I\,d\Omega = \frac{4\pi}{c}\,\frac{\sigma T^4}{\pi} = \underbrace{\frac{4\sigma}{c}}_{\equiv a} T^4$$

עבור $\theta=0$ I מת אוטומטית על הכדור.

$a\equiv\frac{4\sigma}{c}$ הוא קבוע הקרינה $=7.56\times10^{-15}\,erg\,cm^{-3}K^{-4}$ המקשר בין טמפ' לבין צפיפ'

האנרגיה של פוטונים בגוף שחור.

כמה אנרגיה נבלעת בחומר במרכז הכדור?

המשוואה של המעבר קרינה היא:

$$\frac{dI}{dx} = -\underbrace{k_\nu I}_{\text{בליעה.}} + B$$

ז.א. קצב הבליעה מקרן I הוא $k_\nu I$. מכל הקרניים, נקבל:

קצב בליעה ליח' נפח (אנרגיה ליח' נפח ליח' זמן) $\rightarrow$

$$A = k_\nu\int I\,d\Omega = +k_\nu\frac{4\pi\,\sigma T^4}{\pi} = 4k_\nu\sigma T^4$$

בשיווי משקל, קצב הפליטה שווה לקצב הבליעה (אחרת, האלמנט היה מתחמם או מתקרר!). לכן:

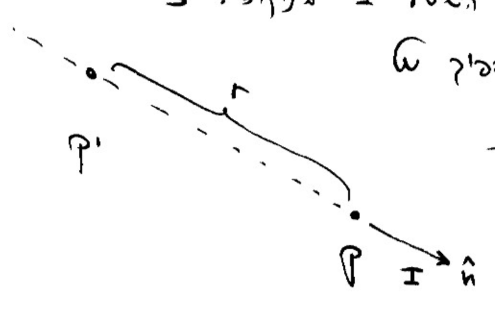
$$\int B\,d\Omega = A = 4k_\nu\sigma T^4 \rightsquigarrow B = k_\nu\frac{\sigma T^4}{\pi}$$

מה שמתקבל הוא:

$$\frac{dI}{dx} = -k_\nu\left(I - \frac{\sigma T^4}{\pi}\right)$$

מה המשוואה הזו אומרת? בכל נקודה ונקודה אני פולט (לכל כיוון) אנרגיה של $k_\nu\frac{\sigma T^4}{\pi}$ (ליח' זמן ליח' שטח ליח' זווית מרחבית) לכל הכיוונים. כל פוטון נע לכיוון אליו נפלט ויש לו סיכוי $k_\nu dx$ להיבלע באלמנט באורך dx.

מה זה אומר? אם נסתכל על נקודה P, אזי השטף I בנקודה זו יהיה בעל תרומות מכל הנקודות P' שנמצאות בכיוון ההפוך של הקרן. כפי שראינו מקודם, הסיכוי של פוטון לצאת מ-P' ולהגיע ל-P הוא:



$$P(x) = \frac{\exp(-k_\nu r)}{\int_0^\infty \exp(-k_\nu r)\,dr} = k_\nu\exp(-k_\nu r)$$

השטף עצמו יהיה:

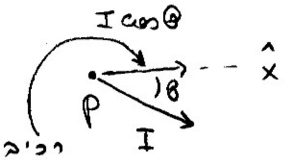
$$I=\int_0^{\infty} dr\, B(p')\exp(-\kappa_\nu r)$$

ראינו שבפרקו האנרגיה היא:

$$E=\frac{1}{c}\int I\, d\Omega$$

בצורה דומה נמצא שהשטף הוא:

אנרגיה שטרסמן - $F_x=\int I\cos\theta\, d\Omega$



רכיב של I בכיון $\hat{x}$ שתורם ל F_x. האינטגרל מסכם את התרומה מכל ה I ים.

נניח כעת שB מעורב בה יש גרדיאנט במצבי ∇T בכיון של $\hat{x}$.

מה יהיה שווה השטף?

$$B(p')=\kappa_\nu\frac{\sigma T_{p'}^4}{\pi}=\kappa_\nu\frac{\sigma\left(T_p-r|\nabla T|\cos\theta\right)^4}{\pi}$$

$$\cong\frac{\kappa_\nu\sigma T_p^4}{\pi}-\frac{4\kappa_\nu\sigma T_p^3 r|\nabla T|\cos\theta}{\pi}+\text{איברים בסדר גבוה יותר של } (\kappa_\nu^{-1}\nabla T/T)$$

השטף יהיה:

$$F=\underbrace{\int d\Omega}_{2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}\int_0^{\infty} dr\left[\frac{\kappa_\nu\sigma T_p^4}{\pi}-\frac{4\kappa_\nu\sigma T_p^3 r|\nabla T|\cos\theta}{\pi}\right]\exp(-\kappa_\nu r)$$

$$=2\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta}_{=0}\int_0^{\infty} dr\,\kappa_\nu\frac{\sigma T_p^4}{\pi}\exp(-\kappa_\nu r)$$

$$-2\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta}_{=2/3}\int_0^{\infty} dr\,\kappa_\nu\frac{4\sigma T_p^3|\nabla T|\, r}{\pi}\exp(-\kappa_\nu r)$$

$$=-\frac{16}{3}\sigma T_p^3\frac{|\nabla T|}{\kappa_\nu}\underbrace{\int_0^{\infty}(\kappa_\nu r)(\kappa_\nu dr)\exp(-\kappa_\nu r)}_{=1}=-\frac{16}{3}\sigma T^3\frac{\nabla T}{\kappa_\nu}$$

ע״י $4\sigma=ac$ ו- $E=aT^4$:

$$F=-\frac{c}{3}a\frac{\nabla(T^4)}{\kappa_\nu}=-\frac{c}{3}\frac{\nabla E}{\kappa_\nu}$$