עוד על המשפט הויריאלי

ראינו מהמשוואה ההידרוסטטית את המשפט הויריאלי:

$$-3\int P\,dV = \Omega$$

– אנרגית הקשר הגרביטציונית

עבור $\underbrace{U_v}_{\text{ליחידת נפח}} = \beta P$ מקבלים:

$$-\frac{3}{\beta}\underbrace{\int U_v\,dV}_{U \text{ הכוללת}} = \Omega$$

(כאשר למשל $\beta=3/2$ עבור גאז מונואטומי קלסי, $\beta=3$ עבור גאז מונואטומי יחסותי).

מה שמקבלים הוא:

$$-\frac{3}{\beta}U = \Omega$$

[הערה: ניתן לעבוד עם האנרגיה הקינטית במידה וישנן דרגות חופש פנימיות:
$K = \frac{3}{2}P \rightarrow 2K = -\Omega$]

האנרגיה הכוללת תהיה:

$$E = U + \Omega = \underbrace{U}_{\text{תמיד חיובי}}\left(1 - \frac{3}{\beta}\right) = \underbrace{\Omega}_{\text{תמיד שלילי}}\left(1 - \beta/3\right)$$

עבור $\beta \geq 3$ האנרגיה הכוללת חיובית ואז אי אפשר לבנות כוכב, כי הוא פשוט ירצה להתפרק! $\beta=3$ הוא המקרה של גאז מונואטומי יחסותי (כשחלקיקים הם יחסותיים... הם גם מונואטומים...) במקרה זה האנרגיה הכוללת של הכוכב מתאפסת, ואז הכוכב "אדיש" לגבי שינוי ברדיוס כי הם לא עולים לו באנרגיה. לכן, כשלחץ הקרינה של כוכבים נהיה דומיננטי, הכוכבים נהיים לא יציבים.

בעזרת γ, מקבלים:

$$\gamma \equiv \frac{\beta+1}{\beta} \;\Rightarrow\; \beta = \frac{1}{\gamma-1} \;\Rightarrow\; E = \Omega\left(1 - \frac{1}{(\gamma-1)3}\right) = \Omega\left(\frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\right)$$

ניתן לראות שוב כי עבור $\gamma \le 4/3$ האנרגיה הכוללת היא חיובית והכוכב לא יציב. במקרה כזה שווה לכוכב להתפשט ל-∞ כי אז הוא מרוויח אנרגיה (שהופכת לאנרגיה קינטית). בנוסף, אני רוצה שגבול החום שהיה שלילי, נהיה חיובי ... מה שמקודם ייצב את האינטרקציה, הצעניות עכשיו גורם מפריע.

עובדה נוספת מעניינת היא ההתבדרות של היחס בין האנרגיה הפנימית לאנרגיה הגרביטציונית:

$$\frac{E}{\Omega} = \left(1 - \frac{1}{3(\gamma-1)}\right) \xrightarrow[\gamma\to1]{} \infty$$

זה מפני שעבור פוליטרופה $\gamma \to 1$ הכוכב "לא נגמר" אף פעם והוא ממשיך עד אין-סוף.

פוליטרופות:

ראינו שתי משוואות שמתארות את הכוכב:

משוואת המסה: $\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ והמשוואה ההידרוסטטית $\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$

על מנת לסגור את הקשרים צריכים משוואה שתקשר בין P ו- ρ, ז.א. אנו צריכים משוואת מצב: $f(\rho, P, T) = 0$ אולם גם משוואה כזו לא תעזור מספיק כי משוואת המצב מכניסה משתנה נוסף - הטמפרטורה T. המשוואה הנוספת תתקבל לרוב ממשוואת מעבר אנרגיה (למשל ע"י קרינה) שהיא הבאה:

$$\frac{dT}{dr} = \dots$$

אולם, אם יש שטף אנרגיה אנו צריכים משוואה נוספת שתתן לנו את יצירת האנרגיה במרכז (דהיינו ע"י ראקציות גרעיניות), ולבסוף, נצטרך תנאי שפה חיצוניים, למשל $P(r=R_*)=0$, $L = 4\pi R_*^2 \sigma T_s^4$ וכו'...

הבעיה המלאה היא אם כן מאוד מורכבת, לכן במקרים רבים מקרבים את הבעיה (או שאונסים אותה להרגעות) בעזרת קשר פוליטרופי, ז.א.:

$$P = K\rho^{\gamma} \equiv K\rho^{(n+1)/n}$$

γ - נקרא המקדם האדיאבטי של הפוליטרופה.

n (כמו כן) נקרא האינדקס הפוליטרופי (polytropic index)

נסתכל על כמה דוגמאות ונגלה שלפעמים הקירוב הוא די טוב ולפעמים לא...

דוגמא 1: גאז אידיאלי אדיאבטי – אם לאטמוספירה יש פרופיל עבורו

האנטרופיה הספציפית (ליח' נפח) נשארת קבועה אזי הפרופיל יהיה זהה לזה המתקבל מתהליך אדיאבטי. הדוגמא העיקרית לכך הוא קונבקציה (לא חלקה מדי) ואז הקשר הוא באמת קשר אדיאבטי:

$$P = \rho^{\gamma} \qquad \gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} \qquad \underbrace{C_v = \frac{3}{2}nk \quad C_p = \frac{5}{2}nk}_{\text{גאז מונואטומי קלאסי}}$$

לכן $\gamma = 5/3 \longrightarrow n = 1.5$

את זה היה קורה בגאז דו-אטומי אז היינו מקבלים $\gamma = 7/5$ (בטמפ' מספיק נמוכות כך שהדרגות חופש הפנימיות קפואות - רק סיבוב) בטמפ' גבוהות יותר $\gamma \sim 4/3$ ואילו כאשר המולקולות מתיוננות אני בטמפ' בה יש יינון $\gamma \sim 1$ זאת מפני שרוב הגדול חום הינו ליינון לכן $C_v \simeq C_p \leftarrow \gamma \sim 1$.

דוגמא 2: גאז עם לחץ קרינה חשוב

נסתכל על מערכת בה גם לחץ הגאז וגם לחץ הקרינה חשובים:

$$P_g = nkT = \frac{\rho}{\underbrace{m_1}_{\text{משקל של חלקיק 1}}} kT$$

$$P_r = \frac{aT^4}{3} \qquad \underbrace{a}_{\text{קבוע הקרינה}} \equiv \frac{4\overbrace{\sigma}^{\text{קבוע סטפן בולצמן}}}{c}$$

הלחץ הכולל הינו:

$$P = P_g + P_r$$

נגדיר β כיחס בין לחץ הגאז ללחץ הכולל:

$$P_g \equiv \beta P \rightarrow P_r = (1-\beta)P$$

3

ג3א) מהמשוואה המבדהימה:

$$P = p$$

ונקבל:

$$\frac{P_g}{\beta} = \frac{P_r}{1-\beta}$$

או:

$$\frac{k \rho T}{m_1 \beta} = \frac{1}{3} a T^4 \frac{1}{1-\beta}$$

ולכן:

$$T = \left(\frac{k}{m_1} \frac{3}{a} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right)^{1/3} \rho^{1/3}$$

והלחץ אם כן הוא:

$$P = \frac{k}{m_1} \frac{\rho T}{\beta} = \left[\left(\frac{k}{m_1} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}$$

לכן, אם גם β נשאר קבוע, יש לנו קשר פוליטרופי בין P ו-ρ, עם $n=3$ $(\gamma = 4/3)$.

באופן כללי, β יכול להשתנות אולם במקרים רבים, β בערך קבוע באטמוספרה בה מעבר קרינה הוא חשוב:

המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP_{tot}}{dr} = -A \rho M(r)$$

המשוואה של מעבר קרינה:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} \simeq -B \rho \kappa L(r)$$

עבור אטימות קבועה ו- M/L שנשאר קבוע (בערך...) נקבל:

$$\frac{P_{tot}}{P_{rad}} \simeq \frac{A}{B} \simeq \text{const} \longrightarrow \beta = \text{const}$$

β קבוע הוא המודל של אדינגטון לכוכבים. משתמשים בו לתאר כוכבים רדיאטיביים. לפעמים התיאור טוב יותר, ולפעמים פחות...

דוגמא 3:

חומר מנוון: כאשר לחץ פרמי גדול ($E_F \gg kT$), הטמפ' אינה חשובה ונקבל שהלחץ נובע רק מלחץ החלקיקים המנוונים (לחץ ניוון).

$$\underbrace{P \propto \rho^{\overbrace{5/3}^{n=3/2}}}_{\text{חלקיקים קלסיים}} \quad ; \quad \underbrace{P \propto \rho^{\overbrace{4/3}^{n=3}}}_{\text{חלקיקים יחסותיים}}$$

חלק ניכר מהבנת ההתנהגות של כוכבים ניתנת לתיאור בקירוב ע"י הבנת ההתנהגות של כוכבים פוליטרופיים. המשוואה שיש לפתור נקראת משוואת ליין-אמדן.

משוואת Lane Emden

נהוג להגדיר:
$$\rho \equiv \lambda \phi^n$$

עם $\phi = 1$ במרכז. זאת אומרת:
$$\lambda \equiv \rho(r=0)$$

עבור חומר קלסי לא מנוון, הפונקציה ϕ תהיה יחסית לטמפ' (מנורמלת לטמפ' במרכז!) אולם באופן כללי (למשל עבור חומר מנוון) זה לא חייב להיות המצב.

הלחץ הוא:
$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}} = K\lambda^{\frac{n+1}{n}}\phi^{n+1}$$

כלומר:
$$\rho \propto \phi^n \quad \text{ו-} \quad P \propto \phi^{n+1}$$

המשוואות שיש לפתור הן של שיווי משקל הידרוסטטי:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$ ומשוואת המסה:

נחלק את המשוואה ההידרוסטטית ב- ρ ונכפיל ב- r^2. אחר כך נגזור ונקבל:

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = -GM(r) \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -G\frac{dM(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \rho$$

ממשוואת הרציפות.

המשוואה שקיבלנו דומה למשוואת פואסון בקואורדינטות כדוריות, אבל לא כי ρ משתנה כאן. נציב את הגדלים עבור הלחץ והצפיפות:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\lambda\phi^n} K \lambda^{(n+1)/n} (n+1)\phi^n \frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G \lambda \phi^n$$

או לחילופין:

$$(n+1)K\lambda^{\overbrace{\frac{n+1}{n}-1}^{1/n}} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda\phi^n$$

נוכל כעת להגדיר אורך אופייני:

$$l \equiv \left[\frac{(n+1)K\lambda^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

ונגדיר קואורדינטה חסרת מימדים: $\xi \equiv r/l$ ואז:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right) = -\phi^n$$

עבור כל אינדקס n ניתן לפתור את המשוואה ולקבל $\phi_n(\xi)$

אולם פתרון אנליטי סגור ישנו עבור $n=0,1,5$

תנאי השפה: $\phi=1$ (נירמול של ϕ) ו- $\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$

נראה צורות.

6

$$\left.\frac{dp}{dr}\right|_{r=0} = \lim_{r\to 0} (-)\frac{GM(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{(-)G\, dM(r)/dr}{dr^2/dr} = \lim_{r\to 0}\frac{4\pi G r^2 \rho}{2r}$$

נסתכל על הנגזרת

$$= 0 \qquad (\text{כי: } r^2/r \to 0)$$

לכן:
$$\left.\frac{dp}{dr}\right|_{r\to 0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dp}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\,\phi^{(n+1)}}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$$

ולבסוף
$$\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$$

לאחר ביצוע האינטגרציה מתקבלות התוצאות הבאות:

- עבור $n<5$ מגיעים ב- ξ סופי ל- $\phi=0$ (דהיינו $\rho=0$). ז"א, הכוכב "נגמר" ברדיוס סופי.
- עבור $n\geq 5$ מגיעים ל- $\xi\to\infty$ עם ϕ סופי. ז"א הכוכב לא רוצה להגמר ונצטרך תנאים נוספים (למשל, לחתוך את הכוכב ברדיוס שממנו המהירות בריחה היא מסדר גודל של המהירות התרמית.)

רדיוס הכוכב:

רדיוס הכוכב ביחידות "חסרות יחידות" הוא פשוט ξ_1 בה האינטגרציה הסתיימה:

$$R_* = \xi_1 l = \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right)^{1/2} \lambda^{\frac{(1-n)}{2n}} \xi_1$$

מסת הכוכב:

מסת הכוכב נתונה ע"י:

$$M(\xi) = \int_0^{r = l\xi} 4\pi r^2 \rho\, dr = 4\pi l^3 \lambda \int_0^{\xi} \phi^n \xi^2\, d\xi$$

בעזרת משוואות ליין-אמדן:

$$\xi^2\phi^n = -\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)$$

$$M(\xi) = -4\pi l^3\lambda\int_0^{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)d\xi = -4\pi l^3\lambda\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}$$

המסה הכוללת של הכוכב היא אם כן:

$$M_{TOT} = M(\xi=\xi_1) = -4\pi l^3\lambda\xi_1^2\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1} =$$

$$= -4\pi\left(\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right)^{3/2}\lambda^{\frac{3-n}{2n}}\left.\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right)\right|_{\xi=\xi_1}$$

הצפיפות הממוצעת והצפיפות במרכז:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{3M_{TOT}}{4\pi r_*^3}\rho_c^{-1} = -\frac{3}{4\pi\xi_1^3 l^3}4\pi l^3\lambda\xi_1^2\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi_1}\lambda^{-1}$$

$$= -\frac{3}{\xi_1}\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

כפי שניתן היה לצפות, היחס בין הצפיפות הממוצעת והצפיפות במרכז אינו תלוי בפרמטרי הנירמול של המודל, רק ב- n.

הלחץ במרכז הוא:

$$P_c = K\lambda^{\frac{n+1}{n}}$$

ואחרי מעט חשבון...

$$P_c = \frac{GM_{TOT}^2}{R_*^4}\frac{1}{4\pi(n+1)\left[\left.\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)\right|_{\xi=\xi_1}\right]^2}$$

8

עבור $n=3$ מקבלים:

$$M_{TOT} = 4\pi \left[\frac{4K}{4\pi G} \right]^{3/2} \cdot 1 \cdot 2.018$$

צ"ל! המסה תלויה רק בערך של K ולא ברדיוס או הצפיפות:

$$K = \left[\left(\frac{k}{m_1} \right)^4 \frac{3}{a} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right) \right]^{1/3}$$

עבור גאז חומר קרינה:

אחרי הצבה מקבלים:

$$M_{TOT} \cong 7.9 \left(\frac{k}{m_1} \right)^2 \left(\frac{1}{a} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/2} \frac{1}{G^{3/2}}$$

$$\cong \underbrace{M_*}_{\text{מסה טבעית של כוכבים}} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/2} \left(\frac{m_p}{m_1} \right)^2$$

המסה הטבעית שמקבלים היא המסה עבורה לחץ הקרינה ולחץ הגאז הם מאותו הסדר גודל

$$M_* \simeq \left(\frac{k_B}{m_p} \right)^2 \left(\frac{1}{a} \right)^{1/2} \frac{1}{G^{3/2}} \cong 18 M_\odot$$

$$m_1 = \underbrace{\mu}_{\text{משקל מולקולרי}} \cdot m_p$$

אנו רואים שלפי המודל של אדינגטון לכוכבים:

- היחס בין לחץ הגאז ללחץ הקרינה תלוי במסה ולא ברדיוס הכוכב או בצפיפות.
- הגדלת μ תקטין את M בהינתן אותו β לכן, בשמירה על המסה משמעותה β יותר קטן.