דיסקיות ספיחה

דיסקיות ספיחה נוצרות כי לחומר הנספח למערכת יש בד"כ תנע זויתי המונע ממנו ליפול ישירות אל הגוף הסופח. כתוצאה מכך, נוצרות בדר"כ דיסקות ספיחה אשר תפקידה בחיים להעביר את התנע הזויתי של החומר הנספח למעט חומר הנשאר בחוץ.

נתחיל בלבחון את התנהגות התנע הזויתי בדיסקה עם צמיגות, ואחר"כ נדון מעט בצמיגות ונמשיך לכתוב את המשוואות הכלליות של דיסקה דקה.

נתחיל בלבחון את ההשפעה של צמיגות על הזרימה. נסתכל על זרימה עם $v_x(y)$

$$\longrightarrow v_x(y+\Delta y)$$

$$\longrightarrow v_x(y)$$

$$\longrightarrow v_x(y-\Delta y)$$

הכח שפועל על יחידת מסה בשכבה המרכזית הוא:

$$\underbrace{F_{\xi,x}}_{\text{הכח ליח' מסה.}} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

זהו האיבר שמופיע במשוואת נביאר-סטוקס (אין מה לעשות לזה... בקורס מכניקת הרצף). בכל מקרה, ננסה להבין מהיכן הוא נובע: נכתוב את נטו הכח על השכבה כדי שהשכבה מעל מפעילה פחות הכח שהשכבה הנתונה מפעילה על השכבה מתחת. כח זה יהיה:

$$f_1 = \nu \frac{v_x(y+\Delta y) - v_x(y)}{\Delta y} = \nu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

לכן, הכח שפועל נטו על השכבה שלנו הוא:

$$F_\xi = \frac{\nu}{\Delta y}\left[\underbrace{f_1(y+\Delta y)}_{\text{הכח שמפעיל המשטח העליון.}} - \underbrace{f_1(y)}_{\text{הכח שמפעיל על המשטח ממתחת}}\right] = \nu \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$$

עכשיו שאנחנו מבינים מה קורה במערכת קרטזית, נחזור אל החישוב במערכת צילינדרית עם סיבוב.

נסתכל על טבעת. מה המקבילים במקרה זה? כח ← מומנט
מהירות ← מהירות זוויתית.

כעת, המומנט ליח' מסה, מהטבעת שנמצאת ברדיוס גדול יותר הוא:

כדי להפוך כח למומנט.

$$\underbrace{\tau_{1,g}}_{\text{מומנט מבחוץ מצד אחד ליח' מסה.}} = r \cdot \nu \cdot \underbrace{r\frac{\partial \Omega}{\partial r}}_{\frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

שימו לב שהיינו יכולים להכניס לתוך הנגזרת תלויות אחרות של r. למשל:

$$r\frac{\partial \Omega}{\partial r} \to \frac{\partial (r\Omega)}{\partial r}$$

הבחירה שלנו $r\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ היא היחידה שנותנת שלא מופיע מומנט למקרה של סיבוב כמו גוף קשיח, שהוא המקרה בו לא אמור להיות מומנט!

עבור טבעת ברוחב יחידה, המומנט הכולל הוא:

$$\underbrace{G}_{\text{מומנט כולל לטבעת ברוחב יחידה}} = 2\pi r \underbrace{H\rho}_{=\Sigma} \tau_{1,g} = 2\pi r^3 \nu \Sigma \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

Σ – כמות המסה ליח' שטח.

המומנט נטו הוא: (על כל הטבעת)

מומנט שמקבלת ב- r+dr מפעולה על r.

$$N = \frac{G(r+\Delta r) - G(r)}{\Delta r} = \frac{\partial G}{\partial r}$$

המומנט שמקבלת ב- r מפעולה על r-dr.

העבודה שעושה אותו מומנט על טבעת ברוחב dr היא:

$$dW = \Omega N dr = \Omega \frac{\partial G}{\partial r} dr$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial r}(\Omega G) - G\Omega'\right] dr$$ (כתיבה בצורת אינטגרציה בחלקים)

אם נבצע אינטגרציה מ- r_{in} ל- r_{out} נקבל שהאיבר הראשון יתן משהו שתלוי בקצה ואילו האיבר השני הוא מהווה תרומות מקומיות (מקומיות):

$$W_{tot} = \int dW = \underbrace{\Omega G\Big|_{r_{in}}^{r_{out}}}_{\text{א.}} - \underbrace{\int G\Omega' dr}_{\text{ב.}}$$

האיבר הראשון א', מתאר את העבודה שתנאי השפה עושים על הדיסקה. לעומת זאת האיבר השני ב. מתאר את האנרגיה שהולכת לאיבוד בתוך הדיסקה, דהיינו, העברת האנרגיה המכנית לאנרגיה תרמית ע"י החיכוך.

נקבל שליחידת שטח:

$$\underbrace{D(R)}_{\text{קצב הדיסיפציה ליח' שטח}} = \frac{G\Omega'}{\underbrace{4\pi}_{\text{שני צדדים לדיסקה!}} R} = \frac{1}{2}\nu\Sigma(R\Omega')^2 \geq 0$$

(שקופית מס 33)

קבלנו שהדיסיפציה תמיד חיובית (כמו שאנו אמורים לקבל!)

עבור דיסקה קפלרית: $\Omega = \Omega_K \equiv \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$ נקבל:

$$D(R) = \frac{9}{8}\nu\Sigma\frac{GM}{R^3}$$

המבנה הרדיאלי של דיסקאות

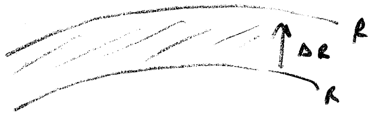
נתחיל בלבחון את המבנה הרדיאלי של דיסקאות (אח"כ נעבור למבנה האנכי).

באופן כללי, בדיסקה תהיה תלות מסוימת של המהירות הסיבובית ברדיוס. אם הלחץ אינו גדול (כפי שנראה בהמשך) כי אז התנועה תהיה קפלרית:

$$\Omega = \Omega_K(R) = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$$

לפני שניכנס לזה, נסתכל באופן כללי על מה קורה בדיסקה מבחינת שימור חומר, תנע זוויתי וכו'. כתלות ב- $\Omega(R)$ הנתון.

נבחן טבעת ברדיוס ΔR בין R ל- $R+\Delta R$



כמות המסה הכוללת בטבעת כזו היא:

$$\Delta m = 2\pi R\,\Delta R\cdot\Sigma$$

קצב השינוי בכמות המסה יינתן ע"י ההפרש בין כמות החומר שנכנסת בצד אחד וכמות החומר שיוצאת בצד השני:

מהירות רדיאלית (מוגדרת כלפי חוץ ולכן שלילית בדרכ"כ)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi R\,\Delta R\,\Sigma\right) = \underbrace{v_R(R,t)\,2\pi R\,\Sigma(R,t)}_{\text{כמות החומר שנכנסת מהצד הפנימי.}} - v_R(R+\Delta R,t)\,2\pi(R+\Delta R)\,\Sigma(R+\Delta R,t)$$

$$\simeq -2\pi\,\Delta R\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma v_R\right)$$

הגבול בו- $\Delta R\to 0$ מקבלים לבסוף: (אחרי חלוקה ב- $2\pi\Delta R$) ש-

$$R\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma v_R\right) = 0$$

זוהי משוואת הרציפות עבור הדיסקה.

באותה דרך, ניתן להסתכל על כמות התנע הזוויתי שיש באותה טבעת,
וכיצד כמות זו משתנה. הפעם, חוץ מהתנע הזוויתי שנכנס ויוצא דרך
הקצוות, יש שינוי של תנע זוויתי עקב הפעלת מומנט (שטבעות
שכנות מפעילות כח אחת על השניה). לכן:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi R\,\Delta R\,\Sigma\,R^2\Omega\right) = v_R(R,t)\,2\pi R\Sigma(R,t)\,R^2\Omega(R) - v_R(R+\Delta R,t)\,2\pi(R+\Delta R)^3\Sigma(R+\Delta R,t)\,\Omega(R+\Delta R)$$

$$+\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R$$ המומנט מכח החיכוך.

ושוב, בגבול של $\Delta R\to 0$ נקבל:

$$R\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma R^2\Omega\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma v_R R^2\Omega\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R}$$

את המשוואה הזו ניתן לפשט ע"י שימוש במשוואה שקיבלנו משימור מסה;
נרשום את האיבר הראשון:

$$R\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma R^2\Omega\right)= R^3\underbrace{\frac{\partial\Sigma}{\partial t}}_{\text{נציב משימור מסה.}}\Omega + R^3\Sigma\underbrace{\frac{\partial\Omega}{\partial t}}$$

נסתכל על פוטנציאלים
הקבועים בזמן (לפחות על סקלת הזמן של הצבירה).
במקרה זה האיבר יתאפס.

סה"כ נקבל:

$$R\Sigma v_R\left(R^2\Omega\right)' = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R}$$

ואם נציב תוצאה זו במשוואת הרציפות נקבל:

$$R\frac{\partial\Sigma}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(R\Sigma v_R\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{2\pi\left(R^2\Omega\right)'}\frac{\partial G}{\partial R}\right]$$

את הביטוי הקודם ניתן לפשט אם אנו יודעים את $\Omega(R)$.
עבור פוטנציאל מרכזי $\Omega(R)$ יהיה ה-Ω הקפלרי. אם נציב את $G(R)$
שמצאנו עבור פוטנציאל קפלרי, נקבל:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left\{ R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\left[\nu \Sigma R^{1/2}\right]\right\}$$

זוהי משוואת דיפוזיה (לא לינארית) עבור צפיפות החומר בדיסקה. כדי לפתור אותה, אנו צריכים ביטוי עבור ν (שבאופן כללי יכול להיות פונקציה של Σ).

בהינתן פתרון עבור Σ, ביחד עם התוצאות הקודמות: $G(R,t) = 2\pi R \nu \Sigma R^2 \Omega'$

$$R\Sigma v_R (R^2\Omega)' = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R}$$

נקבל שהמהירות (כתלות בפתרון עבור Σ ממשוואת הדיפוזיה) יהיה:

$$v_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}}\frac{\partial}{\partial R}\left[\nu \Sigma R^{1/2}\right]$$

ממשוואת הדיפוזיה אנו רואים שיש זמן אופייני: $t_{visc} \sim \frac{R^2}{\nu}$

כאשר R היה סקלת המרחק האופייני. (למעשה אם ישנו שינוי על סקלות מרחק דינמית יותר $\frac{\partial}{\partial R} \to \frac{1}{l}$, נקבל $t_{visc} \sim \frac{l^2}{\nu}$).

הזמן t_{visc} הוא הזמן האופייני שבו פועלת הצמיגות כדי למחוק חוסר ההומוגניות נגד כדי לבצע את הספירה עצמה.

במקרה הפרטי בו ν קבוע, ניתן לפתור את המשוואה בדרך
אנליטית, עבור חומר המתחיל מהיותו בטבעת:

עבור ν קבוע:
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{1/2}\Sigma\right) = \frac{3\nu}{R}\left(R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}\right)^2\left(R^{1/2}\Sigma\right)$$

נגדיר $s=2R^{1/2}$ ונקבל:
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{1/2}\Sigma\right) = \frac{12\nu}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(R^{1/2}\Sigma\right)$$

כעת נכתוב: $R^{1/2}\Sigma = T(t)S(s)$ (כלומר נעשה הפרדת משתנים) ונקבל:
$$\frac{T'}{T} = \frac{12\nu}{s^2}\frac{S''}{S} = \text{constant} = -\lambda^2$$

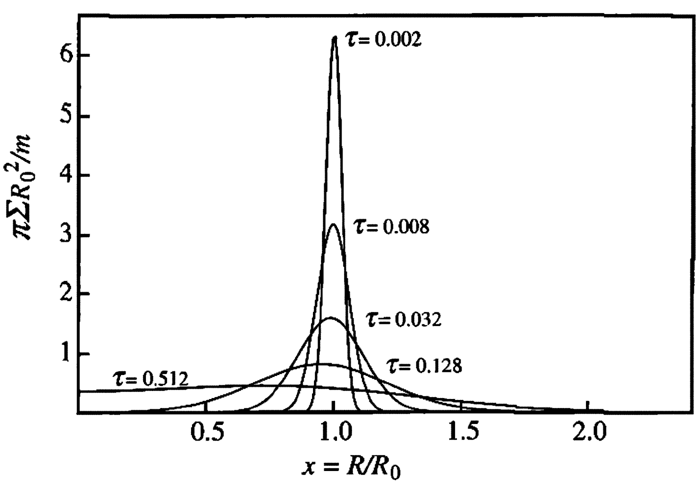
הפתרונות עבור T ו-S הם לפיכך exp ופונקציות בסל - Bessel.

הפתרון המתקבל עבור:
$$\Sigma(R,t=0) = \frac{m}{2\pi R_0}\delta(R-R_0)$$

הוא:
$$\Sigma(x,\tau) = \frac{m}{\pi R_0^2}\tau^{-1}x^{-1/4}\exp\left\{-\frac{(1+x^2)}{\tau}\right\} I_{1/4}(2x/\tau)$$

כאשר מגדירים $x\equiv \frac{R}{R_0}$ $\tau\equiv\frac{12\nu t}{R_0^2}$

מחישוב נומרי של $\Sigma(x,\tau)$ ושל המהירות המתקבלת ממנה: $v_R = -\frac{3\nu}{R_0}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^{1/2}\Sigma\right)$
ניתן לראות שהזמן האופייני לפיזור רוב הטבעת הוא $\tau\sim 1$
בנוסף, עבור זמנים מתקדמים יותר ויותר, כמות המסה שנעה החוצה ($v_R>0$)
נהיית קטנה יותר ויותר, דהיינו, פחות ופחות חומר לוקח את התנע הזוויתי שלמערכת.



דיסקיות דקות קבועות בזמן

אם אין שינויים בקצב הספיחה על סקלת זמן של הספיחה : $\sim R^2/\nu$
כי אז נקבל דיסקיות קבועות בזמן. נציב $\partial/\partial t \to 0$ במשוואות
הרציפות נקבל:

$$R\Sigma v_R = \text{const}$$

לכן ניתן לרשום:

$$\dot M = 2\pi R\Sigma(-v_R) = \text{const.}$$

באותה צורה, שימור התנע הזוויתי נותן:

$$R\Sigma v_R R^2\Omega = \frac{G}{2\pi} + \frac{C}{2\pi}$$

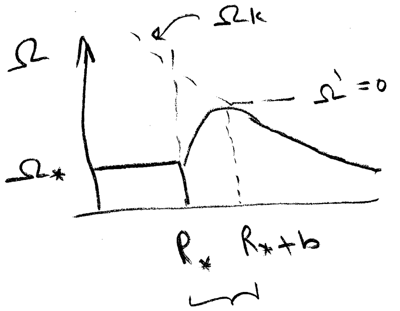
כאשר C הוא קבוע אינטגרציה. אם נציב את הביטוי $G = 2\pi R\nu\Sigma R^2\Omega'$
נקבל:

$$-\nu\Sigma \frac{\partial\Omega}{\partial R} = \Sigma(-v_R)\Omega + \frac{C}{2\pi R^3}$$

הקבוע C הוא למעשה הקצב בו תנע זוויתי עובר אל הגוף הסופח
(או לחלופין, המומנט שאותו גוף מפעיל על חלקה הפנימי של הדיסקה).

(נסתכל על מקרה בו הדיסקה מגיעה עד פני הכוכב. הכוכב אמור להסתובב
יותר לאט מהדיסקה (אחרת הכוכב יתפרק!) כלומר: $\Omega_* < \Omega_K(R_*)$.

בדיסקה הקפלרית, $\Omega_K(R)$ קטן עם הרדיוס. מאידך גיסא, ליד הכוכב,
$\Omega(R)$ חייב לקטון עם ההתקרבות לכוכב. לכן ישנו מקום ב- $R=R_*+b$
(עם b כלשהו) בו $\Omega'=0$



שכבת הגבול.

היות ובדרכ"כ $b \ll R_*$ (כדי שתנאי זה ישבר,
על האיזור של שכבת הגבול להיות חם מאוד
כך שמהירות הקול מסדר גודל של מהירות
הדחיסה) המהירות בנקודה R_*+b
היא קרובה למהירות הקפלרית המחושבת ב- R_*.

כלומר:
$$\Omega(R_*+b)\simeq\left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}\left(1+O\left(b/R_*\right)\right)$$

בנקודה הזו גם $\frac{d\Omega}{dR}=0$ ולכן ממשוואת התנע הזוויתי נקבל שקבוע האינטגרציה C מקיים:
$$C=2\pi R_*^3\Sigma v_R\,\Omega(R_*+b)=-\dot{M}(GMR_*)^{1/2}$$

הצבת הביטוי עבור Ω
ומשוואת שימור המסה - $\dot{M}$

הצבת C במשוואת שימור התנע הזוויתי (עבור R הכללי) תיתן:
$$\nu\Sigma=\frac{\dot{M}}{3\pi}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

אם נציב את התוצאה הזו בביטוי עבור קצב הדיסיפציה שקיבלנו מקודם נקבל ש-
$$D(R)=\frac{3GM\dot{M}}{8\pi R^3}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

כלומר קצב הדיסיפציה אינו תלוי בצמיגות! הסיבה היא שאם הצמיגות נמוכה יותר, קצב תנועת החומר פנימה תהיה קטנה יותר, ונצטבר יותר חומר בכל רדיוס. רק שכמות החומר הגדולה יותר כפול קצב דיסיפציה (ליח' מסה) קטן יותר יתן עדין את אותו שחרור החום ליח' זמן.

ניתן לראות כעת כמה אנרגיה תשתחרר בין כל שני רדיוסים:
$$L(R_1,R_2)=\underset{\text{משני צידי הדיסקה}}{2}\int_{R}^{R_2}D(R)\,2\pi R\,dR\underset{\text{הצבה של }D(R)}{=}\frac{3GM\dot{M}}{2}\int D(R)\,2\pi R\,dR$$

אינטגרציה נותנת:
$$L(R_1,R_2)=\frac{3GM\dot{M}}{2}\left\{\frac{1}{R_1}\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]-\frac{1}{R_2}\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{R_*}{R_2}\right)^{1/2}\right]\right\}$$

אם לוקחים $R_1=R_*$ ו- $R_2\to\infty$ נקבל:
$$L_{disk}=\frac{GM\dot{M}}{2R_*}=\frac{1}{2}L_{acc}\qquad\left(L_{acc}=\frac{GM}{R_*}\cdot\dot{M}\right)$$

כלומר הדיסקה משחררת חצי מאנרגיית הספיחה ושכבת הגבול את החצי השני!

המבנה האנכי של הדיסקה.

השלב הבא הוא הבנת המבנה האנכי של הדיסקה.

המשוואה ההידרוסטטית היא:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left[\frac{GM}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]}$$

הפוטנציאל בקואורדינטות ספריות.

בקרוב של דיסקאות דקות, נקבל $z \ll R$ ואז:

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{GM}{R^3} z$$

אם סקלת הגובה האופייני של הדיסקה היא H, נוכל לכתוב

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \sim \frac{1}{\rho}\cdot\frac{P}{H} \sim \frac{1}{\rho}\frac{c_s^2 \rho}{H} = \frac{c_s^2}{H}$$

כמו כן:

$$\frac{GM}{R^3} = \frac{GM}{R}\cdot\frac{1}{R^2} = \underbrace{v_K^2}_{\text{המהירות הקפלרית}} \frac{1}{R^2}$$

לכן, המשוואה ההידרוסטטית היא למעשה (מבחינת סדרי גודל):

$$\frac{c_s^2}{H} \sim \frac{v_K^2}{R^2} H \longrightarrow H \sim \frac{c_s}{v_K} R$$

כלומר, סקלת הגובה של הדיסקה קטנה מהרדיוס כל עוד מהירות הקול קטנה מהמהירות הקפלרית (לחילופין, כל עוד הלחץ הפנימי של הדיסקה קטן ביחס ללחץ הוויריאלי הדרוש לאותו רדיוס).

המשוואות הבאות שיש לפתור הן אלה שמתארות את מעבר האנרגיה ויצירתה בדיסקה, משוואות המצב וכו'.

11

משוואת המצב שלנו היא:

$$② \quad P = \frac{\rho k T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

המשוואה הבאה שצריך היא מעבר האנרגיה:

$$③ \quad F(z) = \frac{-16\sigma T^3}{3\underbrace{k_R}_{\text{ממוצע של Rosseland}}\rho} \frac{\partial T}{\partial z}$$

כדי לדעת למה שווה השטף, צריך את קצב יצירת החום ע"י היליך:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Q^+$$

כאשר Q^+ הוא הקצב ליח' נפח של יצירת חום, הוא יקיים:

$$F(z) - \underbrace{F(0)}_{=0!} = \int_0^z Q^+(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

כי במישור הדיסקה אין נטו שטף מסימטריה.

ברור שאם נקח את כל הדיסקה, נקבל

$$F(z\to\infty) = \int_0^\infty Q^+(\tilde{z})\, d\tilde{z} = D(R)$$

מקומית אפשר לחשב את Q ע"י נירמול:

$Q^+ \propto \rho$

$$\hookrightarrow Q^+(z) = \frac{\rho(z)}{\int_0^z \rho(\tilde{z})\, d\tilde{z}} D(R)$$

לבסוף, אני צריכה תנאי שפה ב- $z\to\infty$ על הצפיפות אנרגיה / טמפרטורה.
ניתן לקחת אותו ב- $\tau = 2/3$ (עומק אופטי) היכן ש- $\sigma T^4 = F$:

$$\sigma T^4(\tau = 2/3) = D(R)$$

קירובים

כדי לפשט, ניתן לקחת מספר קירובים. ראשית, נניח כי רב הדיסקה איזותרמית ואז, המשוואה ההידרוסטטית נראית:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} C_T^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{v_K^2}{R^2} z$$

מהירות הקול האיזותרמית:

$$C_T^2 \equiv P/\rho$$

למשוואה זו יש את הפתרון:

$$\rho(R,z) = \underbrace{\rho_c(R)}_{\text{הצפיפות במרכז הדסקה}} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right)$$

כאשר: $H \equiv \frac{C_T}{v_K} R$.

נעבוד עם משתנים במרכז הדסקה ואז:

$$P_c = \frac{\rho_c k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4$$

נניח גם שכל האנרגיה נוצרת במרכז הדיסקה. במקרה כזה, השטף F קבוע ושווה לקצב יצירת האנרגיה $D(R)$.

לבסוף, ניתן לקשר בין העומק האופטי הכולל וסך כל החומר בדסקה:

$$\tau = \int_0^\infty \rho \kappa_R(\rho(z),T(z))\,dz \simeq \underbrace{\kappa_R(\rho_c,T_c)}_{\text{נקח את הערכים במרכז לשם קירוב}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \rho\, dz}_{\equiv \Sigma}$$

סה"כ נקבל אוסף משוואות מקורבות שניתן לפתור אלגברית:

$$\rho_c \simeq \Sigma / H$$

$$H = \frac{C_T R^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$

$$c_T^2 = P_c/\rho_c$$

$$P_c = \frac{\rho_c k T_c}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c} T_c^4$$

$$\underbrace{\frac{4\sigma T_c^4}{3\tau}}_{\simeq F} \simeq \frac{3GM\dot{m}}{8\pi R^3}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$\tau \simeq \Sigma \kappa_R(\rho_c,T_c)$$

$$\nu\Sigma = \frac{\dot{m}}{3\pi}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]$$

$$\nu = \underbrace{\cdots}_{\text{תלוי איזה מודל לוקחים}} = \alpha c_T H$$

למשל,

כדי לקבל את הספקטרום הכולל מן הדסקה, אנו צריכים לדעת את הטמפ' בכל רדיוס ורדיוס. אולם, מכיון שאנו יודעים את השטף, ניתן בעזרת חוק סטפן בולצמן לקבל:

$$F = \sigma \underbrace{T}^{4}(R) = D(R)$$

טמפ' נראית של הדסקה (לא הטמפ' במרכז).

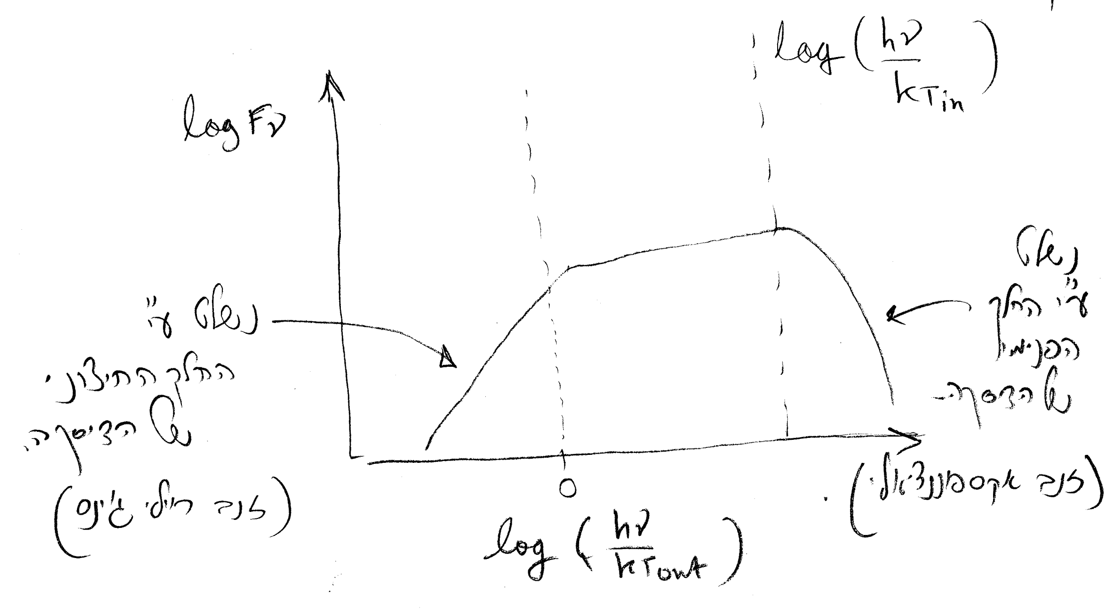
(זה מניח שיש מספיק חומר בדי שהדסקה תהיה עבה אופטית).

מהביטוי שקבלנו עבור $D(R)$ בדסקה קפלרית הנמשכת עד כמעט לפני הכוכב ב- $R=R_*$ מקבלים:

$$T(R) = \left\{\frac{3GM\dot{m}}{8\pi R^3 \sigma}\left[1-\left(\frac{R_*}{R}\right)^{1/2}\right]\right\}^{1/4}$$

השטף הכולל יתקבל מאינטגרציה של הספקטרום של פלנק מכל רדיוס כפול כמות השטח שיש בכל רדיוס.

סה"כ נקבל:



מהי הצמיגות בדיסקאות ספירה?

אחת מהשאלות המעניינות, והלא פתורות בתחום של דיסקאות ספירה הוא מהות הצמיגות. ברור שצמיגות מיקרוסקופית אינה יכולה להסביר את הספירה. זאת מפני שזמן האופייני לספירה היה גדול בהרבה סדרי גודל מעבר לתצפיות (למשל, של אורך החיים של דיסקה פרוטו-פלנטרית בכוכבים שנוצרים). לכן, חייב להיות מקור לצמיגות מקרוסקופית, למשל, ע"י טורבולנציה כך שאלמנטים עושים דיפוזיה לתנע (שהיא צמיגות), לא ע"י התנגשויות בין מולקולות (שהיא צמיגות מיקרוסקופית) אלא ע"י החלפת המקום או התנגשות בין אלמנטים מקרוסקופיים.

כיום, שתי התאוריות המובילות הן ע"י אי-יציבות מגנטית וע"י אי יציבות הידרודינמית לא לינארית, זאת מפני שבסדר לינארי דעת הדיסקה היא יציבה. באי היציבות המגנטית, הסיבוב הדיפרנציאלי מותח את השדה המגנטי שמקשר אלמנטים שונים של הדיסקה. באי יציבות ההידרודינמית הלא לינארית, הטענה היא היות שבגלל שמספר רינולדס הוא כל כך גדול, מספיקה הפרעה קטנה (אך לא לינארית) כדי להפוך את המערכת ללא יציבה. היות ודיסקאות שלא מיוננות (שאינם יכולים להחזיק בשדה מגנטי) כן קיימות (ואחראיות ליצירת כוכבים...) דעתו של המרצה היא שאי יציבות לא לינארית הידרודינמית חייבת להיות קיימת.

בגלל שמהות הצמיגות אינה ידועה, את הצמיגות הלא לינארית צריך למדל בדרך כלשהי, שהיא שרירותית במידה מסוימת.

ישנן שתי דרכים סטנדרטיות (ועוד מספר דרכים פחות מקובלות אך כשרות באותה מידה) לתיאור הצמיגות.

מודל α

המודל הפשוט ביותר לתיאור הצמיגות היה מודל α. הראשונים שהשתמשו במודל הזה לתיאור דיסקות היו שקורה וסוניאב (Shakura-Sunyaev).

צמיגות מתקבלת ממרחק חופשי ממוצע כפול מהירות. אם נקח את עובי הדיסקה H כגודל האופייני המקסימלי ואת מהירות הקול כמהירות המקסימלית לתנועה טורבולנטית, נקבל מקדם דיפוזיה מסדר גודל של $\sim Hc_s$.

לכן, במודל α לוקחים:

$$\nu \equiv \alpha H c_s$$

α – גודל חסר ממדים שאמור להיות מסדר גודל של יחידה. (בדרך כלל לוקחים $\alpha \sim 0.1$).

H – סקלת הגובה של הדיסקה.

c_s – מהירות הקול בדיסקה.

מודל β

מודל אחר הוצע ע"י Lynden Bell ו- Pringle, במודל זה המבוסס על תוצאות מעבדה (במספרי ריינולדס נמוכים הרבה יותר) לוקחים:

$$\nu = \beta \Omega R^2$$

כאשר ה-β האופייני שנלקח הוא $\beta \sim 10^{-5}$.

ישנם מודלים יותר פרטניים, k-ε ו- k-ω שמתארים את האנרגיה הטורבולנטית ומגדירים את ν באופן דינמי.