אנליזת יחידות

להבדיל מרוב התחומים האחרים, בפיזיקה אנו צריכים להבין הרבה על הפתרון עוד לפני שמבצעים חישובים על הבעיה. כל זאת בגלל שלגדלים פיזיקליים יש יחידות. היחידות הבסיסיות הן מרחק, מסה וזמן, ובעזרתן ניתן לדעת הרבה על הפתרון של בעיה כלשהי.

* לדוגמא, חלקיק נופל גובה h בשדה כבידה של g נתון. מה תהיה מהירותו בקצה התחתון?

הגדלים שיכולים להופיע בפתרון הם - מסת חלקיק m - $[gr]$
- המרחק h - $[cm]$
- התאוצה g - $[cm/sec^2]$

הדרך היחידה בה אנו צריכים להרכיב מהירות מהגדלים הנ"ל היא: $\frac{cm}{sec}=\sqrt{\frac{cm}{sec^2}\cdot cm}$

כלומר, הפתרון הסופי יכיל את הביטוי $\sqrt{hg}$, כלומר:
$$v=\alpha\sqrt{hg}$$

הביטוי האמיתי:
$$x=\frac{1}{2}gt^2=h \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}} \; ; \; v=gt=\sqrt{2gh}$$

ז.א. עד כדי פקטור מספרי של $\sqrt{2}$ יכולנו לנחש את הפתרון בלי בכלל להתחיל לפתור את הבעיה!

מה תהיה המהירות נפילה של גוף מ-∞ לפני כדור ברדיוס R? הגדלים בבעיה יש את R, M_*, m (מסת הגוף הנופל) וכמובן - G.

R - $[gr]$
M_*, m - $[kg]$

מה היחידות של G? נשתמש בנוסחא:
$$g=\frac{GM}{R^2}$$
$$[G]=\frac{[g][R^2]}{[M]}=\frac{cm}{sec^2}\cdot cm^2\cdot gr^{-1}=cm^3\,gr^{-1}\,sec^{-2}$$

מהגדלים הנ"ל אנו רוצים לבנות גודל של מהירות:

I. ראשית, כדי לקבל גודל שאינו מכיל מסה, אנו רואים ש-G צריך להופיע ביחד עם מסה.

$$[GM_*] = cm^3 sec^{-2}$$

שימו לב, היינו צריכים להחליט אם משתמשים ב-M_*, m של הגוף או קומבינציה. במקרה הזה השתמשנו בידע פיזיקלי מוקדם שאומר לנו שמסת הגוף הנופל אינה חשובה (אלא אם כן היא מסדר גודל של הכוכב עצמו...).

II. כדי לקבל מהירות, יש לחלק באורך ולהוציא שורש. האורך היחיד הוא R ולכן:

$$v \sim \frac{GM_*}{R}$$

לא ניתן לקבל מהירות בצורה אחרת. לכן, כל גדלי המהירות שיתארו את הבעיה יהיו המהירות הנ"ל כפול פקטור גיאומטרי קבוע. למשל, מהירות בריחה, מהירות לתנועה מעגלית סביב הכוכב וכו'...

* רדיוס בוהר

ננסה כיצד משיקולי מימדים ניתן לנחש את רדיוס של אטום המימן, עד כדי קבוע חסר יחידות כמובן.

רדיוס אטום המימן מתקבל מהשוואה של שני אלמנטים פיזיקליים.

ראשית, ישנו את חוק קולון שב-cgs נראה: $v = \frac{e^2}{r}$

ועקרון אי הוודאות של הייזנברג (למשל): $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$

עקרון אי הוודאות הוא התוצאה הבסיסית לעובדה שהאלקטרון מתנהג כמו גל, באותה מידה היינו יכולים להשתמש במשוואות שרדינגר. בשני המקרים אנו מקבלים שהרדיוס תלוי ב-$\hbar$.

מחוק קולון אנו רואים שהבעיה תלויה גם במטען e^2 (או Ze^2 אם מדובר באטום כמו מימן עם גרעין טעון יותר. למשל, אלקטרון מסביב לגרעין הליום.

הגדלים שנותנים את הבעיה:

- מסת האלקטרון ו/או מסת הפרוטון $[m]=gr$
- קבוע פלנק $[\hbar]=[\Delta x \Delta p]=\frac{cm^2 gr}{sec}$
- מטען $[e^2]=[v\cdot r]=erg\cdot cm=\frac{gr\, cm^3}{sec^2}$

$\uparrow$

$v=e^2/r$

<u>הערות</u>: 1. נדון בהמשך איזו מסה בדיוק יש לקחת. כרגע נרשום פשוט m.

2. כדי לקבל את היחידות של a קבוע פלנק ו- e^2 משתמשים בנוסחה פשוטה.

3. היינו יכולים לעבוד עם e ולא e^2 אולם אז היו מופיעים גדלים כמו $\sqrt{gr}$ הדרך היחידה לבטלם היתה אם הם יופיעו בחזקה זוגית ולכן ניתן ישר לעבוד עם e^2 לשם נוחות.

אנו רוצים לזהות מימד של אורך $[a]=cm$. כדי לבטל את ה- sec, ברור כי האורך יכיל את הביטוי $\hbar^2/e^2$, כדי להפטר מה- gr יהיה עלינו לחלק במסה, ונקבל:

$$a \sim \frac{\hbar^2}{me^2}$$

כעת נדון בשאלה איזו מסה יש לקחת. ללא ידע נוסף בפיסיקה, ברור שיש לקחת איזו שהיא פונקציה של המסות m_e ו- m_p שנותנת מחדש מסה. היות ורצוי שלא לעבוד עם פונקציות עם ממדים, ניתן לכתוב זאת:

$$m=m_e\, f\left(\frac{m_e}{m_p}\right)$$

בצורה זהה ניתן היה לקחת מסה: $m=m_p\, \tilde{f}\left(\frac{m_e}{m_p}\right)$

עם פונקציה אחרת. בשתי הדוגמאות יח' המסה בגודל מחוץ לפונקציה והפונקציה עצמה היא גם חסרת יח'ידות והיא גם תלויה בגודל שהוא חסר יחידות.

אולם, יש לנו כאן ידע מוקדם מפיסיקה. במכניקה למדנו שבעיית שתי הגופים אקויוולנטית לבעיית גוף אחד עם מסה מצומצמת. לכן, התשובה הסופית לרדיוס בוהר תהיה תלויה רק במסה המצומצמת:

$$a \sim \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \qquad \mu=\frac{m_e m_p}{m_e+m_p}=m_e\left(\frac{(m_p/m_e)}{1+(m_p/m_e)}\right)$$

באותה צורה אנו יודעים, מבע מוקדם, שהתלות במטען היא דרך חוק קולון. חוק זה "רואה" רק את המכפלה של המטענים. לכן, אם מדובר באלקטרון סביב גרעין טעון יותר, יש להחליף את e^2 ב-Ze^2. רדיוס בוהר יהיה אם כן:

$$a \sim \frac{\hbar}{\mu Z e^2}$$

כמובן שאנו לא יודעים את המקדם המספרי (חסר היחידות) שמופיע בקשר אולם קשר זה נהדר עבור סקיילינג.

תרגיל: * מהו רדיוס של אטום הפוזיטרוניום (אלקטרון ופוזיטרון)?

במקרה זה: $\mu = \frac{m_e^2}{2m_e} = \frac{m_e}{2}$ ולכן רדיוס בוהר יהיה פי שניים מרדיוס אטום המימן.

* מהו רדיוס של ברזל מיונן 25 פעמים? במקרה זה $Z=26$ ולכן רדיוס בוהר יהיה קטן בפקטור 26 מרדיוס אטום המימן.

בצורה דומה, היינו יכולים להרכיב אנרגיה מהגדלים הנ"ל ולקבל את אנרגית הקשר של המימן.

* <u>קרינה דיפולית (של דיפול חשמלי)</u>.

עוד דוגמא, מהו הביטוי לקצב פליטת הקרינה האלקטרומגנטית ע"י דיפול חשמלי שמתנדנד בתדירות ω?

כעת המשוואות הבסיסיות הן המשוואות של מקסוול, לכן, הפעם, לא כמו הבעיה האלקטרוסטטית של אטום המימן, מהירות האור כן צריכה להכנס לפתרון.

בנוסף, אנו מחפשים את השפעת הדיפול, לכן, במקום מטען נחפש ביטוי התלוי במומנט הדיפול d, דהיינו מטען x הסחה. $[d] = esu \cdot cm$

הביטוי יהיה תלוי גם ב-ω. הוא לא יכול להיות תלוי ב-$\hbar$ כי הבעיה אינה קוונטית. הביטוי לא יהיה תלוי ב-G כי הבעיה אינה כבידתית.

אבל דרוש: $[P] = \frac{\text{אנרגיה}}{\text{יח' זמן}} = \frac{erg}{sec} = gr\frac{cm^2}{sec^2}\frac{1}{sec} = gr\frac{cm^2}{sec^3}$

שגלים נתונים: $[c] = \frac{cm}{sec} \qquad [\omega] = \frac{1}{sec}$

כדי לא לעבוד עם אורסים. $[d^2] = esu^2 cm^2 = erg \cdot cm^3 = gr\frac{cm^2}{sec^2} \cdot cm^3 = gr\frac{cm^5}{sec^2}$

כדי לקבל gr בתשובה הסופית, יש לקחת d^2.

$$\frac{P}{d^2} = gr\frac{cm^2}{sec^3}\frac{sec^2}{gr\, cm^5} = \frac{1}{sec\, cm^3}$$

כדי שלא יהיה cm, יש להכפיל ב-c^3:

$$\frac{c^3 P}{d^2} = \frac{1}{sec\, cm^3} \cdot \frac{cm^3}{sec^3} = \frac{1}{sec^4}$$

ולבסוף בעזרת חלוקה ב-ω^4 מתקבל

$$\left[\frac{c^3 P}{d^2 \omega^4}\right] = 1 \Rightarrow P = \underbrace{\alpha}_{\text{חסר יחידות}} \frac{d^2 \omega^4}{c^3}$$

לא ניתן בעזרת שלושת הגדלים לקבל גודל חסר יחידות.

כח גרר על גוף בזרם טורבולנטי.

פעמים רבות יש להשתמש בידע מוקדם מפיסיקה על-מנת לצמצם את מרחב האפשרויות המימדי. למשל, מעניין אותנו לדעת מהי הצורה של כח הגרר שפועל על גוף (למשל כדור) הנע במהירות v בתוך נוזל. כח הגרר לא יהיה תלוי בצפיפות או מסת הגוף למשל, אולם הוא יכול להיות תלוי בצפיפות האויר ρ (או הנוזל) כי ברור שצפיפות גבוהה יותר תפעיל לחץ (וכוח) גדול יותר. היא תהיה תלויה ב-v מהירות הגוף. היא יכולה להיות תלויה בגודל הגוף R - אופייני. היא יכולה להיות תלויה ב-ν - הצמיגות של הנוזל (או גז) והיא יכולה להיות תלויה ב-v_s - מהירות הקול. הנה ויש המון פרמטרים כאן, ניתן לקבל גרר בעזרת הרבה (אין סוף) קומבינציות לכן עלינו להשתמש

בידע נוסף על מנת שנוכל לצמצם את האפשרויות.

ראשית, אם מדובר בזרימה שהיא במהירות הנמוכה מאוד ממהירות הקול ניתן גם להניח שמהירות הקול אין סופית ואז ברור שהיא לא תכנס לפתרון!
(ידוע במכניקת הזורם שזרימות במהירויות נמוכות $v_s \gg v$ הן אכן בלתי-דחיסות ואינן רגישות למהירות הקול).

שנית, ידוע במכניקת הזורם שישנם שני גבולות לזרימה - גבול למינרי בו הזרימה מתנהגת יפה (מסודר) ואחידה בזמן וגבול טורבולנטי בו הזרימה מתערבלת.

ידוע שבגבול השני, הטורבולנטי אין הזרימה תלויה בצמיגות הנוזל. אם הצמיגות נמוכה מספיק (ונבין במדויק בהמשך) הגוף אינו רואה את הסקלות הקטנות בהן יש את הדיסיפציה של אנרגיה (צמיגות!) והוא נשלט מהסקלות הגבוהות. לכן, בגבול הטורבולנטי כח הגרר אינו תלוי ב-ν.

אם כן, יש לנו את v, R ו-ρ כדי לקבל את F:

$$[F] = dyne = gr\frac{cm}{sec^2} \quad \Big| \quad [\rho] = \frac{gr}{cm^3} \quad [R] = cm \quad [v] = \frac{cm}{sec}$$

← כדי לקבל gr, $F\propto\rho$:

$$\left[\frac{F}{\rho}\right] = \frac{gr\,cm}{sec^2}\frac{cm^3}{gr} = \frac{cm^4}{sec^2}$$

← כדי להעלים את sec^{-2}, נחלק ב-v^2:

$$\left[\frac{F}{\rho v^2}\right] = \frac{cm^4}{sec^2}\,\frac{sec^2}{cm^2} = cm^2$$

← לכן:

$$F = \underset{\smile}{\alpha}\,\rho R^2 v^2$$

חסר יחידות.

במקום לטפל עם R^2, לרוב עובדים עם השטח חתך של הגוף A
(עבור כדור $A=\pi R^2$) ומחליפים את הקבוע חסר הממדים:

$$F = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2$$

$1/2$ – מוגדר מטעמי קונסיסטנטיות עם הגדרות ישנות...

C_d – נקרא מקדם הגרר. $C_d=1$ עבור צילינדר $\xleftarrow{v}$ $C_d=0.5$ עבור כדור.

$C_d \simeq 0.25-0.45$ עבור מכוניות.

אם כן, מה למדנו השעור?

* במידה ובעיה נתונה אינה תלויה במספר רב מדי של פרמטרים יתכן ומשיקולי מימדים ניתן לדעת את התשובה הסופית עד כדי קבוע חסר מימדים.
* אם אנו חסרי מזל, אנו יכולים לפספס את התשובה הנכונה בפקטור גדול (למשל, אם היינו עובדים עם ν במקום ω בחישוב עבור הקרינה הדיפולית, היינו מקבלים תוצאה השונה בפקטור $(2\pi)^4$!).
* למרות זאת, התשובות נהדרות לסקיילינג – כי יודעים את התלות הפונקציונלית.
* במידה ויש יותר פרמטרים ניתן לפעמים לדעת מה הקומבינציה שפרמטרים מסוימים אמורים להכנס לפתרון ובכך לצמצם את האפשרויות (למשל, ידוע בבעיית שני הגופים שהמסות מופיעות בקומבינציה μ, או אם יש כבידה כ- Gm_1m_2).
* במידה ולא ניתן לצמצם, נקבל פתרון שמכיל פונקציות חסרות מימדים (למשל פונקציה של m_1/m_2 או v/v_s וכו'... אולם זה יהיה הנושא הבא שלנו!

גדלים חסרי מימדים

משפט "פאי" של בקינגהם

משפט פאי של בקינגהם, אותו נראה כעת, מדבר על מספר הגדלים חסרי המימדים המתארים בעיה. כפי שנראה גדלים אלו חשובים היות והם מאפיינים כל בעיה ובעיה, ומאפשרים לנו לתאר את צורת הפתרון.

נניח כי בעיה מסוימת מכילה את המשוואה: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$

(לדוגמא, משוואה המקשרת בין זמן המחזור T של מטוטלת לבין האורך L, המסה m ושדה הכבידה g ניתנת לכתיבה כ- $f(T,L,m,g)=0$).

היות והפיזיקה הינה אינווריאנטית להחלפת יחידות (לא משנה אם אנו עובדים ב- c.g.s, m.k.s או בשיטה האנגלית), הפתרון צריך להיות זהה. תנאי זה מוסיף אילוצים (= משוואות נוספות).

* נניח כי ישנן r יחידות בסיסיות (למשל: $r=3$ עבור אורך מסה וזמן), ושכל גודל מורכב מיחידות אלו:

$$x_i = \prod_{j=1}^{r} \underbrace{d_j^{\overbrace{\alpha_{ij}}^{\text{החזקה שיחידה } j \text{ מופיעה בגודל } i}}}_{\text{היחידה}} \underbrace{v_i}_{\text{גודל חסר יחידות (אורך חלקי cm למשל)}}$$

כעת, נבצע טרנספורמציה של יחידות:

$$\overset{\text{חדש}}{d_j^{n}} = \lambda_j \overset{\text{ישן}}{d_j}$$

לכן:

$$x_i^{n} = \prod_{j=1}^{r} \lambda_j^{\alpha_{ij}} x_i$$

היות והפונקציה אינווריאנטית, עדיין מתקיים:

$$f\left(\prod_j^r \lambda_j^{\alpha_{1j}} x_1, \prod_j^r \lambda_j^{\alpha_{2j}} x_2, \ldots, \prod_j^r \lambda_j^{\alpha_{nj}} x_n\right) = 0$$

נגזור לפי λ_k, נשווה ל-0 ונקבל r משוואות:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_k} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \prod_j \frac{\lambda_j^{\alpha_{ij}}}{\lambda_k} \alpha_{ik} = 0$$

נכתוב את המשוואות כאשר $\lambda_j=1$. במקרה זה, נקבל:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_{ik} = 0$$

ז"א מקבלים עוד r משוואות נוספות המתארות את הבעיה. כלומר, במקום משוואה אחת עם n נעלמים, יש r משוואות נוספות, ומספר הנעלמים האפקטיבי, אם ניתן לתאר את הבעיה עם משוואה אחת, הוא לא n אלא n-r.

כלומר, את f ניתן לרשום בצורה:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{n-r}) = 0$$

כך שלא ניתן יהיה להוריד את מספר המשתנים, כמו מקודם, ע"י גזירה וקבלת משוואות נוספות, הגדלים Π_i צריכים להיות חסרי מימדים, אם $\underline{\alpha_{ij}=0}$, כך שהמשוואות $\frac{\partial F}{\partial \lambda_k}=0$ תהיינה טריוויאליות: $0=0$ ולא יהוו אילוצים נוספים על המשוואה $F=0$. ז"א.

משוואה מהצורה: $f(x_1,\ldots,x_n)=0$
ניתנת לכתיבה כ- $F(\Pi_1,\Pi_2,\ldots\Pi_{n-r})=0$ אם ל-x_i יש r מימדים שונים. ה-Π-ים הם גדלים חסרי מימד, ויש $\underline{\underline{n-r}}$ גדלים כאלה המתארים את הבעיה.

<u>דוגמאות:</u>

* מטוטלת מתמטית: אנו מעוניינים בקשר בין המחזור T לבין המסה M, אורך L ותאוצה g:

$$T = \tilde{f}(M,L,g)$$

דבר זה אקוויולנטי לכתיבה בצורה:

$$f(T,M,L,g)=0$$

4 גדלים בבעיה ו-3 מימדים (אורך זמן ומסה). לכן, לפי משפט Π

ישנו $4-3=1$ גדלים חסרי יחידות:

$$\Pi_1 = \frac{gT^2}{L}$$

לכן, ניתן לרשום את המשוואה הנ"ל כ-

$$F\left(\frac{gT^2}{L}\right)=0$$

אם K_n הם ה-n שורשים של F, נקבל:

$$\frac{gT^2}{L}=K_n$$

כלומר:

$$T=\sqrt{\frac{L}{g}}\,\underbrace{\sqrt{K_n}}_{\text{קבוע חסר יחידות}}$$

למעשה, יש פרמטר נוסף, φ_0, שיכול לתאר את זמן מחזור התנועה. במקרה זה:

$$f(T,M,L,g,\varphi_0)=0$$

יש כעת 5 משתנים ו-3 יח' לכן, ישנם שני גדלים חסרי יחידות המתארים את הבעיה:

$$\Pi_1 = \frac{gT^2}{L} \qquad \Pi_2=\varphi_0$$

והפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$F\left(\frac{gT^2}{L},\varphi_0\right)=0$$

משוואה מהצורה הנ"ל, ניתן להפריד לגדל משתנה אחד, כלומר:

$$\frac{gT^2}{L} = G_1(\varphi_0)$$

לכן, זמן המחזור ירשם כמו:

$$T = \sqrt{L/g}\; G_2(\varphi_0)$$

באופן כללי, תמיד ניתן לחלץ גודל מסוים מאחד מה-Π-ים ע"י חילוץ אחד Π והפרדתו:

את: $F(\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{n-r})=0$

ניתן להפוך: $\Pi_1 = G(\Pi_2, \dots \Pi_{n-r})$

ע"י רישום Π כמכפלת הגדלים המתארים את הבעיה: $\Pi_k = \Pi_i x_i^{\beta_{ki}}$

ניתן להפריד את ה-Π:

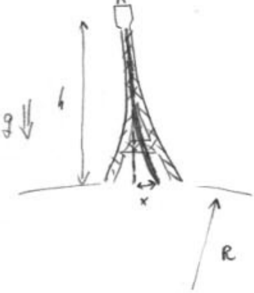
$$X_1 = \prod_{i=2}^{n} x_i^{-\beta_{1i}}\; G(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-r})$$

* אם X_1 מופיע בכמה Π-ים, ניתן ע"י קומבינציה שלהם להוציא את התלות ב-X_1 בכולם מלבד Π אחד ולחזור למקרה הנ"ל.

← לכן, רצוי תמיד שהמשתנה הלא ידוע יופיע ב Π אחד בלבד.

דוגמא 2: כח קוריוליס.

* אם מפילים גוף ממגדל בגובה h (למשל מגדל אייפל), בכמה נפספס את האנך, בגלל כח קוריוליס?



הגדלים שמתארים את הבעיה:

h (הגובה), x ההסטה הסופית, m מסת הגוף

g, ω (סיבוב כדו"א), θ - קו הרוחב של המגדל

ואולי R - רדיוס כדו"א.

במקרה זה, יש לנו 7 משתנים ו-3 יחידות לכן יש צורך ב-4 גדלים
חסרי מימדים. הגדלים שנבחר יהיו:

$$\Pi_1 = \theta$$

$$\Pi_2 = \frac{x}{h}$$

$$\Pi_3 = R/h \qquad \Pi_4 = \frac{h\omega^2}{g}$$

ראשית, בחרנו את הגדלים חסרי היחידות כגדלים חסרי יחידות..., במקרה זה את קו הרוחב θ. שנית, היינו יכולים להצמיד את x ל-h או ל-R. העדפנו ל-h היות ואנו יודעים ש-h יופיע בפתרון (ו-R לא). לכן:

$$x = h\, G\left(\frac{R}{h}, \frac{h\omega^2}{g}, \theta\right)$$

ללא ידע נוסף בפיסיקה לא נוכל להתקדם עוד.

אנו זוכרים ממכניקה, שכח קוריוליס נראה משהו כמו: $F_c = m\vec{\omega}\times\vec{v}$ (ואולי הסדר בין $\vec{\omega}$ ו-$\vec{v}$ הפוך!). לכן, תאוצת הגוף הנ"ל תהיה פרופורציונית ל-ω ולכן גם ההסטה x: $a \propto F_c \propto \omega \Rightarrow x = \iint a\,dt \propto \omega$

כלומר, גם בבעיה ללא קוריוליס, וגם בכח קוריוליס R אינו מופיע. בנוסף החזקה של ω ב-x היא 1. (x ליניארי ב-ω). לכן: 1) $\Pi_3 = R/h$ לא יופיע ואילו $\Pi_4 = \frac{h\omega^2}{g}$ יופיע בחזקת חצי. (הערה: זה נכון כל עוד $\vec{v}$ ב-$\vec{v}\times\vec{\omega}$ אינו תלוי ב-ω בעצמו, דהיינו, שקוריוליס הוא תיקון קטן).

נקבל:

$$x = h\cdot\Pi_3^{1/2}\, G(\theta) = \underbrace{G(\theta)}_{\text{תלוי רק בקו רוחב}} \frac{h^{3/2}\omega}{g^{1/2}} \simeq 12\,cm\cdot G(\theta)$$

דוגמא נוספת : פיצוץ תרמו גרעיני

ב - 1951 חישב טיילור את האנרגיה שהשתחררה בפיצוץ פצצת האטום מתוך הסרטים אותם שחררו האמריקאים. (למרות שהאנרגיה עצמה הייתה מסווגת...).

* רעיונית שלנו בזמן t מתחילת "האנרגיה" E שמשתחררת (בנפח קטן), ע"י הרדיוס אליו הגיע גל ההלם R והאטמוספירה בה מתרחש הפיצוץ: צפיפות ρ ולחץ P.

* סה"כ ישנם 5 גדלים ו-3 יחידות, לכן יהיו שני גדלים חסרי מימדים.

* נחשוב כעת כמו פיזיקאים. מה זה לחץ? לחץ זה אנרגיה ליח' נפח. ניתן ליצור אנרגיה ליח' נפח בעזרת אנרגית הפיצוץ: ER^{-3} (או: $E/\frac{4\pi}{3}R^3$)

משמעות הגודל חסר המימדים:

$$\Pi_1 = \frac{P}{E/R^{-3}}$$

הוא היחס בין צפיפות האנרגיה בפיצוץ לצפיפות האנרגיה מהאטמוספירה. ברור כי אם מספר זה קטן מאוד מאוד, האנרגיה של האטמוספירה (האנרגיה התרמית) לא תשחק תפקיד כי היא תהיה זניחה יחסית לאנרגיה של הפיצוץ.

* גודל נוסף יש ליצור בעזרת הזמן t. למשל:

$$\Pi_2 = R\left(\frac{\rho}{Et^2}\right)^{1/5}$$

ז.א. ישנו את הגדלים:

$$\Pi_1 = \frac{R^3P}{E} \qquad \Pi_2 = R\left(\frac{\rho}{Et^2}\right)^{1/5}$$

כעת, אם מעניין אותנו פתרון מהצורה $R(t)$, אנו נרצה לבודד את R ב- Π אחד.

כמו כן, אנו רואים כי גודל חסר מימדים מעניין הוא היחס בין האנרגיה של הפיצוץ לאנרגיה באטמוספירה, לכן נשמור פה גודל זה אולם נבטא אותו בעזרת t אותו יש לנו נתון.

$$R = \Pi_2 \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{1/5}$$

לכן, ניתן להגדיר את Π_1 מחדש כ:

$$\Pi_1' = \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{3/5} \frac{P}{E} = \frac{t^{6/5} P}{\rho^{3/5} E^{2/5}}$$

הפתרון עבור R יהיה:

$$f(\Pi_1', \Pi_2) = 0$$

$$R = \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{1/5} G\left(\overbrace{\frac{t^{6/5} p}{\rho^{3/5} E^{2/5}}}^{\Pi_2}\right)$$

כפי שאמרנו מקודם, אם מדובר ב- $\Pi_2 \ll 1$, הלחץ לא ישחק תפקיד ואז $G(\Pi_2) \leftarrow$ יהפוך לקבוע ו-

$$R = \underbrace{\alpha}_{\text{מסדר גודל של יחידה}} \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{1/5}$$

את התחזיות הנ"ל רואים גם ניסיונית בפיצוצים "כימיים" בהם E שמשתחרר הוא קטן הרבה יותר.